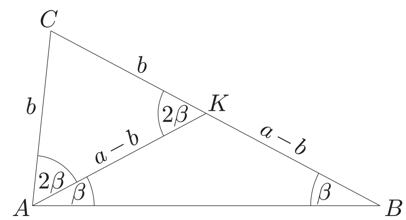
Megoldás. Induljunk ki a kész *ábrából* és használjuk annak jelöléseit. Legyen K a BC oldalnak az a belső pontja, amelyre $KAB\sphericalangle = \beta$. Ekkor az ABK háromszög egyenlő szárú, hiszen az AB oldalon fekvő mindkét szöge β. Emiatt $AK = KB$. A CAK szög nyilván $\alpha - \beta$, és mivel $\alpha = 3\beta$, azért $CAK\sphericalangle = \alpha - \beta = 3\beta - \beta = 2\beta$. Az AKC szög az AKB háromszög egyik külső szöge, így egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével: $AKC\sphericalangle = \beta + \beta = 2\beta$. Ezért az AKC háromszög is egyenlő szárú, hiszen az AK oldalon fekvő mindkét szöge 2β. Emiatt $CK = AC = b$, tehát $AK = KB = CB - CK = a - b$.



Az AKC háromszög mindhárom oldalát ismerjük tehát: $AC = CK = b$, $AK = a - b$; így három oldalából az AKC háromszög megszerkeszthető, és ebből az ABC háromszög B csúcsa is, ha a CK szakasz K-n túli meghosszabbítására K-ból $(a - b)$-t mérünk.

A kapott háromszögben $AC = b$, $BC = b + (a - b) = a$, végül a fenti okoskodás megfordításával adódik, hogy $\alpha = 3\beta$.

Mivel $\alpha = 3\beta$, azért $a > b$ szükséges, hiszen egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van. Ekkor $a - b$ pozitív, az $a - b$ nagyságú szakasz megszerkeszthető. A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$AC + CK > AK, \quad \text{azaz} \quad b + b > a - b, \quad \text{átrendezve:} \quad 3b > a,$$

$$\left.\begin{array}{l} AC + AK > CK \\ CK + AK > AC \end{array}\right\} \quad b + (a - b) > b, \quad \text{azaz} \quad a > b.$$

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor lényegében egyértelműen adódik az AKC háromszög. A második lépés, a B csúcs szerkesztése ezután ugyancsak egyértelműen elvégezhető.

Ha $b < a < 3b$, akkor pontosan egy megoldása van a feladatnak, ha pedig ez nem teljesül, akkor nem szerkeszthető ilyen ABC háromszög.