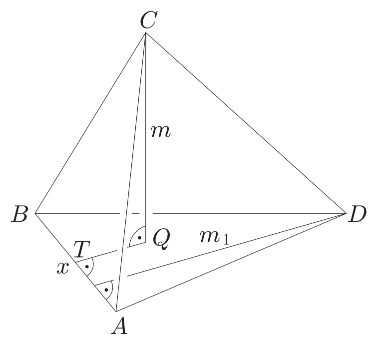
Megoldás. Legyen a tetraéder egyik leghosszabb éle CD, az ezzel szemközti él hossza $AB = x \le 2$. Az x függvényében becslést adunk a tetraéder térfogatára.



Először az ABC háromszög C-hez tartozó CT magasságát becsüljük meg (*ábra*). Legyen a T-hez közelebbi (nem távolabbi) csúcs az AB szakaszon az A. Ekkor $BT \ge \frac{x}{2}$ és a BTC derékszögű háromszögből

$$CT = \sqrt{BC^2 - BT^2} \le \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}. \tag{1}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az ABD háromszög AB-hez tartozó m_1 magasságára:

$$m_1 \le \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}. \tag{2}$$

A tetraéder $CQ = m$ magassága nem lehet nagyobb a CT lapmagasságnál, ezért

$$m \le CT \le \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}. \tag{3}$$

A tetraéder térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot m_1 \cdot m$. (1), (2) és (3) miatt

$$V \le \frac{1}{6} x \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{6}\left(4 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x}{24}(16 - x^2).$$

Elég bizonyítani, hogy $x(16 - x^2) \le 24$, vagy másképpen

$$24 - x(16 - x^2) = (x-2)(x^2 + 2x - 12) \ge 0.$$

Ez most valóban teljesül, mert $x \in \,]0;2]$, és ebben az intervallumban $x - 2 \le 0$ és $x^2 + 2x - 12 < 0$.

Megjegyzések. 1. A feladat és a megoldás lényegében azonos Reiman István: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994* című könyvének 1967/2. feladatával.

2. Az $x(16 - x^2)$ függvény $]0;2]$-ben felveszi a maximumát az $x = 2$ helyen, és ennek a maximumnak eleget tevő tetraéderben az ABC és ABD lapok 2 oldalhosszúságú szabályos háromszögek, amelyeknek síkjai merőlegesek egymásra.