

**Megoldás.** Az egyszínű színezés kielégíti a feltételeket. Csupa kékre színezve bármilyen állítás igaz a nem létező két piros szorzatának színére, csupa piros színezés esetén természetesen két piros szám szorzata piros.

Pontosan egy piros szám nem lehet, mert akkor a végtelen sok kék között lenne egy, amivel megszorozva kapnánk még egy pirosat, azaz ez ellentmondást jelentene. Most már feltehető, hogy van két piros és egy kék szám is, ekkor vehetünk tetszőleges  $p_1, p_2$  piros és  $k_1$  kék számokat. Ezekre  $p_1(p_2 + k_1) = p_1p_2 + p_1k_1$ , ahol a bal oldalon egy piros és egy kék (hiszen piros + kék = kék színű) szám szorzata szerepel, azaz piros; ekkor viszont  $p_1p_2$  nem lehet kék, mert kék + piros  $\cdot$  kék = kék + piros, ami nem piros. Tehát két piros szám szorzata ilyenkor is piros.

*Megjegyzés.* Teljes indukcióval vagy indirekt bizonyítással megmutatható, hogy minden megfelelő színezés olyan, hogy egy  $n$  szám és a többszöröse a pirosak, a többi szám a kék. Legyen  $n$  a legkisebb piros szám, 1-től  $(n - 1)$ -ig a számok ekkor kékek. Egy kék számhoz akárhányszor adva egy pirosat, kéket kapunk, ezért az  $1, \dots, n - 1$  számokhoz  $n$ -eket adva megkaphatjuk az összes  $n$ -nel nem osztható számot. Azaz minden  $n$ -nel nem osztható szám kék. Tegyük fel, hogy  $n$ -nek van olyan többszöröse  $(n \cdot l)$ , ami szintén kék. Ekkor  $n \cdot l$ -hez  $n$ -eket adogatva sorra kapjuk, hogy  $n \cdot (l + 1), n \cdot (l + 2), n \cdot (l + 3)$  stb., minden  $n \cdot l$ -nél nagyobb  $n$ -többszörös is kék, például  $n \cdot (n \cdot l)$  is kék. Másrészt  $n \cdot (n \cdot l)$  egy piros és egy kék szám szorzata, tehát piros. Ez ellentmondás, tehát minden  $n$ -nel osztható szám piros. ( $n$  lehet 1 is, ilyenkor minden szám piros; persze még az is megoldás, ha nincs ilyen  $n$ , azaz minden szám kék.)