Megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a háromszög A csúcsa a $(-1;0)$, B csúcsa az $(1;0)$ pontba, C csúcsa pedig az y tengely pozitív felére kerüljön. Az a oldalú szabályos háromszög magassága $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, ezért C koordinátái $\left(0;\sqrt{3}\,\right)$.

Egy tetszőleges $P(x;y)$ pontnak az A, B, C pontoktól való távolságainak négyzete ekkor az ismert képlet szerint:

$$PA^2=(x+1)^2+y^2,\quad PB^2=(x-1)^2+y^2,\quad \text{és}\quad PC^2=x^2+\left(y-\sqrt{3}\,\right)^2.$$

Az $a)$ esetben tehát P akkor és csak akkor tartozik a mértani helyhez, ha

$$\left((x+1)^2+y^2\right)+\left((x-1)^2+y^2\right)=x^2+\left(y-\sqrt{3}\,\right)^2.$$

Elvégezve a négyzetreemeléseket majd rendezve:

$$2x^2+2y^2+2=x^2+y^2-2\sqrt{3}y+3,$$

$$x^2+\left(y+\sqrt{3}\,\right)^2=4. \tag{1}$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a keresett mértani hely az (1) egyenletű alakzat, egy olyan kör, melynek középpontja az ABC háromszög C csúcsának az AB oldalra vonatkozó tükörképe, sugara pedig megegyezik a háromszög oldalának hosszával (*1. ábra*).

1. ábra

1. ábra

A b) esetben P akkor és csak akkor tartozik a mértani helyhez, ha

$$\left((x+1)^2+y^2\right)+\left((x-1)^2+y^2\right)=$$

$$=2\left(x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2\right),$$

azaz ha

$$2x^2 + 2y^2 + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{3}y + 6,$$

vagyis ha

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{2}$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a keresett mértani hely most a (2) egyenletű alakzat, egy olyan egyenes, amely párhuzamos az ABC háromszög AB oldalával és átmegy a háromszög súlypontján (*2. ábra*).

2. ábra

2. ábra