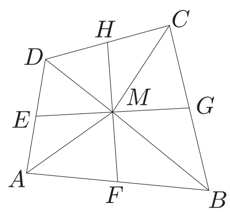
Megoldás. A négyszög csúcsait jelölje A, B, C és D, az oldalfelező pontokat pedig E, F, G és H az *1. ábra* szerint. A két középvonal M metszéspontját az oldalfelező pontokkal összekötő szakaszok súlyvonalak abban a négy háromszögben, amelyekre az M-et a csúcsokkal összekötő szakaszok osztják a négyszöget. Ezek a szakaszok tehát rendre felezik az egyes háromszögek területét. Ebből következik, hogy

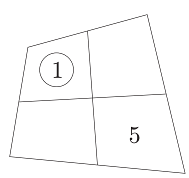
$$[EAFM] + [HMGC] = [DEMH] + [MFBG] = \frac{t}{2}, \tag{1}$$

ahol t az $ABCD$ négyszög területe. ($[EAFM]$ annak a négyszögnek a területét jelöli, amelynek csúcsai E, A, F és M, a további tagok jelentése hasonló.) Ez következik abból, hogy mind a négy pár egyenlő területű háromszög egyike a fenti összeg bal, a másika pedig a jobb oldalán szerepel.



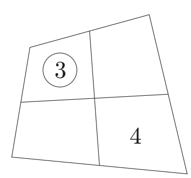
1. ábra

Válasszuk az egyszerűség kedvéért a területmérés egységének a 180 m^2-t. Ekkor az ismert területű négyszögek rendre 2, 4 és 5 egység területűek. Az (1) egyenlőség szerint három eset lehetséges attól függően, hogy az ismeretlen területű negyedik rész melyik ismert területű kis négyszöggel van „átlósan” szemközt a három közül. Ezek az esetek láthatók a *2/a., b., c. ábrákon.* Megmutatjuk, hogy közülük kettő nem jöhet létre.



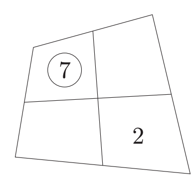
$t = 12,\ \dfrac{t}{8} = \dfrac{3}{2} > 1$

2/a. ábra



$t = 14,\ \dfrac{t}{8} = \dfrac{7}{4}$

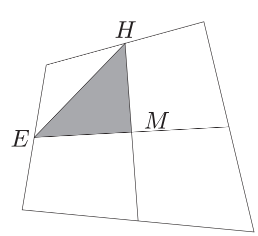
2/b. ábra



$t = 18,\ \dfrac{t}{8} = \dfrac{9}{4} > 2$

2/c. ábra

Ismeretes, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg, melynek területe fele a négyszögének. Az $ABCD$ négyszög középvonalai átlók ebben az $EFGH$ paralelogrammában, azt tehát négy egyenlő, $\dfrac{t}{8}$ területű háromszögre osztják. E háromszögek közül mind a négy örökrész tartalmaz egyet, azért mindegyikük területe nagyobb, mint $\dfrac{t}{8}$ (*3. ábra*). Ez pedig egyedül a második, *2/b. ábra* elrendezésében teljesül, a negyedik fivér örökségének a területe csak 3 egységnyi, azaz 540 m^2 lehet.



3. ábra

Meg kell még mutatnunk, hogy ez az eredmény lehetséges, nincsen olyan további feltétel, ami kizárná. Ehhez megadunk egy konvex négyszöget, amelyben az egyes résznégyszögek területe rendre 2, 4, 5 és 3 egység.

Induljunk ki egy olyan $ABCD$ négyszögből, amelynek az átlói $5:9$, illetve $1:13$ arányban osztják egymást a *4. ábra* szerint. Ilyen konvex négyszög nyilván szerkeszthető. Ekkor $\dfrac{[ABD]}{[CDB]} = \dfrac{1}{13}$, ugyanis a két háromszög közös BD alapjához tartozó magasságok aránya ugyancsak $1:13$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\dfrac{[ACD]}{[CAB]} = \dfrac{5}{9}$. Ha tehát az $ABCD$

négyszög területe 14 egység, akkor az átlói az *5. ábrán* látható módon osztják 1 és 13, illetve 5 és 9 egységnyi területű háromszögekre. A négyszög oldalfelező pontjait összekötő szakaszok ezekben a háromszögekben középvonalak, ezért az $ABCD$ négyszög csúcsainál keletkező háromszögek területe ezeknek az értékeknek a negyede. Végül a $\frac{t}{2} = 7$ egységnyi területű $EFGH$ paralelogrammát az átlói $\frac{7}{4}$ területű háromszögekre osztják (*6. ábra*). Az egyes részek területe így valóban

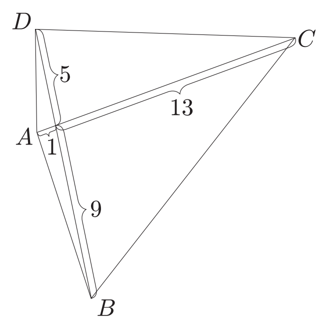
$$[MEAF] = [EAF] + [EFM] = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2,$$

$$[MFBG] = [FBG] + [FGM] = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = 4,$$

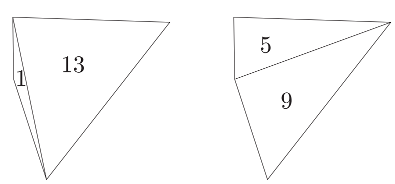
$$[MGCH] = [GCH] + [GHM] = \frac{13}{4} + \frac{7}{4} = 5, \qquad \text{végül}$$

$$[MHDE] = [HDE] + [HEM] = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3.$$

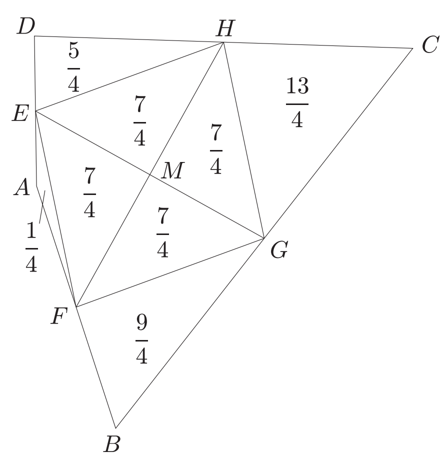
A negyedik testvérnek tehát 540 m^2 rész jutott.



4. ábra



5. ábra



6. ábra