**I. megoldás.** Az $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ jelöléssel:

$$x^3=\left(\sqrt{5}+2\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)-3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right),$$

az $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ azonosság alapján.

Mivel $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=1$, azért összevonás után $x^3=4-3x$ adódik. A kapott egyenlet 0-ra rendezett alakja alapján:

$$0=x^3+3x-4=(x^3-x^2)+(x^2-x)+(4x-4).$$

Szorzattá alakítjuk:

$$0=x^2(x-1)+x(x-1)+4(x-1)=(x-1)(x^2+x+4).$$

Azonban $x^2+x+4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$, így csak $x=1$ teljesülhet. Tehát a megadott $x$ kifejezés értéke valóban racionális szám, hiszen értéke 1.

**II. megoldás.** Mivel

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3=\frac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{8}=\sqrt{5}+2$$

és

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3=\frac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{8}=\sqrt{5}-2,$$

azért

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1,$$

azaz $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ valóban racionális szám, melynek értéke 1.

**III. megoldás.** Először szorozzuk meg a kifejezést 2-vel, aztán alakítsuk át:

$$\begin{aligned}
&2\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-2\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}-\sqrt[3]{8\sqrt{5}-16}=\\
&=\sqrt[3]{5\sqrt{5}+3\cdot 5+3\sqrt{5}+1}-\sqrt[3]{5\sqrt{5}-3\cdot 5+3\sqrt{5}-1}=\\
&=\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}=\left(\sqrt{5}+1\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1=2.
\end{aligned}$$

Tehát az eredeti kifejezés ennek a fele, azaz 1, ami racionális.