Megoldás. Alakítsuk át a kifejezést:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n} - \frac{1}{1+a_n} = \frac{1+a_n-(1-a_n)}{(1-a_n)(1+a_n)} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}.$$

Ismeretes, hogy $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, ezért ha a_1-et $\operatorname{tg} x$-nek választjuk, akkor $a_2 = \operatorname{tg} 2x$, $a_3 = \operatorname{tg} 4x$, $\ldots$, $a_{n+1} = \operatorname{tg} 2^n x$. ($\operatorname{tg} x$ minden valós értéket felvesz, tehát a_1-et is.)

Tegyük föl, hogy a sorozat periódusának hossza k. Ekkor $a_{k+1} = a_1$, azaz $\operatorname{tg} 2^k x = \operatorname{tg} x$.

Ez az egyenlőség akkor teljesül, ha $2^k x = x + \pi \cdot l$ ($l \in \mathbb{Z}$), vagyis $(2^k-1)x = \pi \cdot l$, tehát

$$x = \pi \cdot \frac{l}{2^k-1}.$$

Ebből következik, hogy a sorozat csak akkor lehet periodikus, hogyha arra az x-re, amelyre $a_1 = \operatorname{tg} x$ teljesül, $x = \pi \cdot \dfrac{l}{2^k-1}$ alakú ($k \geq 1$, k és l egész számok).

Ekkor valóban periodikus lesz a sorozat. Meg kell még mutatnunk, hogy a_n sohasem lesz ± 1, vagyis a definiáló egyenlőség mindig értelmes. Ha ugyanis $a_n = 1$ vagy -1, akkor $\operatorname{tg}(2^{n-1}x) = 1$ vagy -1, ebből $2^{n-1}x = \dfrac{1}{4}\pi + j\pi$ vagy $-\dfrac{1}{4}\pi + j\pi$ ($j \in \mathbb{Z}$), tehát $x = \dfrac{1+4j}{2^{n+1}} \cdot \pi$ vagy $x = \dfrac{-1+4j}{2^{n+1}} \cdot \pi$. Tudjuk viszont hogy $x = \pi \cdot \dfrac{l}{2^k-1}$, így e két egyenlőségből

$$\frac{x}{\pi} = \frac{\pm 1 + 4j}{2^{n+1}} = \frac{l}{2^k-1}$$

következik. Ebből $(\pm 1 + 4j)(2^k-1) = l \cdot 2^{n+1}$ adódik, de a bal oldal minden egész j-re és $k \geq 1$-re páratlan, míg a jobb oldal minden egész l-re és $n \geq 1$ esetén páros.

Megjegyzés. Az $\dfrac{l}{2^k-1}$ alakú számok speciálisnak tűnnek, valójában azonban minden páratlan nevezőjű racionális szám ilyen alakba írható. Az Euler–Fermat-tétel szerint ugyanis $(a;n) = 1$ esetén $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Ha $a = 2$, akkor minden n páratlan szám relatív prím a-hoz. Így tetszőleges páratlan v-hez $\dfrac{u}{v}$ bővíthető úgy, hogy a nevező 2-hatványnál 1-gyel kisebb legyen:

$$\frac{u}{v} = \frac{u \cdot t}{v \cdot t} \qquad \text{és} \qquad 2^{\varphi(v)} - 1 \equiv 0 \pmod{v},$$

azaz $t \cdot v = 2^{\varphi(v)} - 1$.