I. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy hét kísérlet elegendő, annál kevesebb pedig nem.

Osszuk a nyolc elemet két darab hármas és egy kettes csoportba. Ekkor a három csoport között van olyan, amely a négy jó elem közül legalább kettőt tartalmaz, így ha az egyes csoportokon belül minden lehetőséget megvizsgálunk, akkor találunk üzemképes párost. Egy hármas csoport teszteléséhez három, a ketteséhez pedig egyetlen próba szükséges, így összesen legfeljebb $3+3+1=7$ kísérlet után sikerrel járunk.

Nézzük meg, mi történhet hat vizsgálat során. Ekkor összesen $6\cdot 2=12$ elemet helyezünk a rádióba, egyeseket természetesen többször is. Ha van olyan elem – jelöljük A-val –, amelyet legalább háromszor próbálunk ki, akkor alakulhatnak úgy a kísérletek, hogy mind a hat megvizsgált párosnak hibás az egyik tagja, három esetben az A, a további háromban pedig a megmaradt három hibás elem valamelyike.

Ha egyetlen elem sem kerül kettőnél többször a rádióba, akkor ez csak úgy lehetséges, ha legalább négy elemet kétszer is kipróbálunk. A hat elvégzett kísérlet között azonban kell legyen olyan is, amelynek egyik résztvevője nem ilyen. Ha ugyanis csak ezekkel próbálkozunk és történetesen mind a négyük hibás, akkor a rádió a hatodik kísérlet után sem szólal meg. E négy elem között tehát van olyan pár, mondjuk A és B, amelyeket nem próbálunk ki együtt, hiszen a négy elemből összesen $\binom{4}{2}=6$ pár alkotható. Ha pedig A és B hibásak, akkor a rádió néma marad abban a négy kísérletben, amelyekben A és B vesznek részt, a további két kísérlet pedig alakulhat úgy, hogy mindegyikükben a másik két hibás elem egyike akad a kezünkbe.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy hat kísérlet általában nem elegendő, a feladatot megoldottuk.

II. megoldás. Noha a feladat szerint „az elemek összekeveredtek", természetes föltevés, hogy a kísérletezés során valamilyen módon azonosítani tudjuk őket. Ez azt jelenti, hogy a kísérlet bármely szakaszában bármely két elemről tudjuk, hogy kipróbáltuk-e már őket együtt és ez a kísérlet milyen eredménnyel járt. Ez például megvalósítható, ha megszámozzuk az elemeket 1-től 8-ig, mielőtt próbálkozni kezdenénk.

A 8 elemet $\binom{8}{2}=28$-féleképpen próbálhatjuk ki és ezek közül mindössze $\binom{4}{2}=6$ esetben működik a rádiónk. Első pillanatra nem látszik jobb megoldás, mint az egyes párok szisztematikus végigpróbálgatása, ez pedig a legrosszabb esetben akár $28-6=22$ sikertelen kísérletet is jelenthet. Ezen a módon viszont figyelmen kívül hagyjuk a sikertelen kísérletekből leszűrhető információt. Pedig ha elemek egy csoportjában nem találunk üzemképes párt, akkor a csoportban legfeljebb egy elem lehet jó; ilyenkor jobban járunk, ha a megmaradt elemek között próbálkozunk tovább.

Ha például három elemet mindhárom csoportosításban megpróbálva egyik esetben sem szólal meg a rádió, akkor e háromból legfeljebb egy elem lehet jó. Így pedig a megmaradó öt elem között legalább három friss van és ilyenkor legfeljebb $\binom{5}{2}-\binom{3}{2}=7$ újabb próbálkozással után már biztosan a kezünkben lesz egy jó pár. De gyorsabban is célhoz érhetünk: a fentiekből lényegében az derült ki, hogy párok helyett – egy kísérlet – elemekből álló hármas csoportokat tesztelve – ez három kísérletet jelent – vagy találunk működő párost, vagy pedig legalább két hibás van a három elem között. Ez azt jelenti, hogy ha két hármas csoport egyikében sem találunk működő párt – ez hat kísérlet –, akkor hármasonként legfeljebb egy-egy jó van az elemek között és így az utoljára maradt két elem már biztosan jó. Hat ilyen kísérlet után a hetedikre biztosan szól majd a rádió.

Megmutatjuk, hogy ennél kevesebb kísérlet általában nem elegendő, tehát bárhogyan is végezzünk el hat kísérletet, előfordulhat, hogy a rádió egyik alkalommal sem szólal meg. Ehhez azt bizonyítjuk be, hogy hat kísérlet után mindig lesz négy olyan elem, amelyek közül egyetlen párt sem próbáltunk még ki. Ha pedig ez a helyzet és történetesen éppen ezek az új elemek, akkor a rádió mind a hat próbálkozásra néma marad.

A bizonyításhoz készítsünk egy 8-csúcsú gráfot, amelynek csúcsai az egyes elemek, kezdetben bármely két csúcsát él köti össze és két csúcs közti élt töröljünk ki, ha a végpontjaiknak megfelelő két elemet együtt kipróbáltuk. A megmaradt gráfban tehát két csúcsot pontosan akkor köt össze él, ha a megfelelő két elemet együtt még nem próbáltuk ki. A 8-csúcsú teljes gráf $\binom{8}{2}=28$ éle közül tehát feltevésünk szerint hatot töröltünk ki, és azt kell bebizonyítanunk, hogy a kapott 8-csúcsú, 22 élű gráfnak van négy csúcsa, hogy közülük bármely kettőt él köt össze, a gráf tartalmaz ún. teljes négyszöget. Ez így ahogy van, egy úttörő magyar gráfelméleti eredmény, a *Turán-tétel* speciális esete[1].

Az eredeti tétel bizonyítása teljes indukcióval történik, most bizonyos értelemben ennek a gondolatmenetnek a megfordításával okoskodunk: az adott gráfból kiindulva annak mind kisebb részgráfjaiban keresünk mind kisebb méretű teljes részgráfot. Eközben lényegében csak a skatulya elvet használjuk, abban a formában, hogy ha egy gráfnak „elég sok" éle van, akkor csúcsai között van „megfelelően nagy" fokszámú. Ez pontosabban fogalmazva azt jelenti, hogy ha egy n-csúcsú egyszerű gráfnak legalább k éle van, akkor van olyan csúcsa, amelyből legalább $\left\lceil \frac{2k}{n} \right\rceil$ él indul ki. Egyszerű gráfban ugyanis az élek számának a kétszerese a csúcsok fokszámának az összege, és így a felső egészrész zárójelen belül a fokszámok átlaga áll.

[1] *Turán Pál* (1910–1976) a számelmélet nemzetközi rangú tudósa gráfelméleti tétele, az ún. extremális gráfelmélet egyik legelső klasszikus problémája. Turán azt a kérdést vizsgálta és oldotta meg a negyvenes évek elején, hogy egy n-csúcsú gráfban hány él biztosítja teljes k-csúcsú részgráf meglétét. A feladat ennek nyilván speciális esete, ha $n=8$ és $k=4$. A témáról olvashatunk többek között Lovász László: *Kombinatorikai Problémák és Feladatok* (Typotex Kiadó, Budapest, 1999), illetve Hajnal Péter: *Gráfelmélet* (Polygon, Szeged, 1997) című könyveiben. A Typotex Kiadó most megjelent könyvében (Martin Aigner, Günter M. Ziegler: *Bizonyítások a KÖNYVből*) pedig nem kevesebb, mint öt bizonyítást olvashatunk az általános tételre.

Ebből most az adódik, hogy kiinduló G_0 gráfunkban van olyan csúcs, amelynek a fokszáma legalább $\left\lceil\frac{2\cdot 22}{8}\right\rceil = 6$. Legyen ez a csúcs A_0, a további csúcsok közül pedig jelöljük B_0-lal azt, amelyik vagy nincs összekötve A_0-lal, vagy ha ilyen csúcs nincsen – ekkor persze A_0 hetedfokú –, akkor a további csúcsok közül a minimális fokszámú. Az utóbbi esetben hagyjuk is el a gráfból az A_0B_0 élt. Az így kapott G_0' gráfban az A_0 csúcsból pontosan 6 él indul ki, az első esetben legfeljebb hatodfokú B_0-ból legfeljebb 6, a másodikban legfeljebb 4; ezért az A_0 csúcs hat darab G_0'-beli szomszédja között mindenképpen legalább 10 él halad. Jelölje G_1 a G_0'-nek azt a 6-csúcsú részgráfját, amelynek az A_0 csúcs szomszédai a csúcsai. Világos a cél: azt kell megmutatnunk, hogy G_1 tartalmaz háromszöget, teljes háromcsúcsú részgráfot; mivel G_1 valamennyi csúcsát él köti össze A_0-lal G_0-ban, a háromszöget A_0-lal kiegészítve valóban teljes négyest kapunk.

A folytatás teljesen hasonló. G_1-ben van legalább $\left\lceil\frac{2\cdot 10}{6}\right\rceil = 4$-edfokú csúcs, legyen ez A_1. Az előző módszerrel válasszuk ki a B_1 csúcsot és hagyjuk el az esetleges A_1B_1 élt. A kapott G_1' gráfban az A_1 pontosan negyedfokú, a szomszédai legyenek a G_2 részgráf csúcsai. Az előző becslés most azt adja, hogy ha G_1'-nek tíz éle van, akkor legfeljebb 9, ha pedig kilenc, akkor legfeljebb 7 él haladhat G_2-n kívül; mindenképpen vannak tehát olyan G_2-beli csúcsok, mondjuk A_2 és A_3, amelyeket él köt össze.

Az így kapott A_0, A_1, A_2 és A_3 csúcsok közül tehát valóban bármely kettőt él köt össze. Ezzel igazoltuk, hogy hat próbálkozás nem feltétlenül elegendő egy működő elempáros kiválasztására, a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A dolgozatok általában nem a fenti gráfban, hanem annak ún. komplementerében okoskodtak. Az természetesebben illeszkedik a feladat körülményeihez: két csúcsot akkor köt össze él, ha a megfelelő elemeket együtt kipróbáltuk; a bizonyítandó állítás azonban nehézkesebb: teljes négyes helyett üres négyes meglétét kell igazolni, tehát olyan pontnégyesét, amelynek semelyik két csúcsa között nem halad él.

2. *Hubai Tamás* (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12. évf.) dolgozatában általánosan oldotta meg a feladatot. A Turán-tétel fenti speciális esetének egy kiterjesztésével igazolta, hogy ha n darab jó és n darab kimerült elemünk van ($n \geq 2$), akkor a legrosszabb esetben $n+3$ próbálkozásra van szükség a rádió megszólaltatásához, ennyi viszont mindig elegendő.