

Megoldás. Ismeretes, hogy egy valós együtthatós negyedfokú polinom felbontható valós együtthatós másodfokú polinomok szorzatára, amelyek – esetleg – tovább faktorizálhatók. A szorzat-alak felírásához kísérjük meg teljes négyzetté alakítani a $p(x) = x^4 + tx^2 + 1$ polinomot. Ez többféleképpen is megtehető:

$$(1) \quad p(x) = \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t^2}{4} - 1\right), \quad \text{illetve}$$

$$(2) \quad p(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - (2-t)x^2 = (x^2 + 1)^2 - (-t+2)x^2 \quad \text{és}$$

$$(3) \quad p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 + (2+t)x^2 = (x^2 - 1)^2 - (-t-2)x^2.$$

Az (1) alak akkor lesz két négyzet különbsége, ha a második tag, $\frac{t^2}{4} - 1 \geq 0$, azaz $|t| \geq 2$. A (2) alak akkor, ha $-t+2 \geq 0$, azaz $t \leq 2$, végül (3) akkor, ha $-t-2 \geq 0$, vagyis $t \leq -2$. Eszerint ha $|t| \geq 2$, akkor (1)-ből

$$p(x) = \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{t + \sqrt{t^2-4}}{2}\right)\left(x^2 + \frac{t - \sqrt{t^2-4}}{2}\right).$$

Ha $t \leq 2$, akkor (2)-ből

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 + 1)^2 - (-t+2)x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{-t+2})^2 = \\ &= (x^2 + x\sqrt{-t+2} + 1)(x^2 - x\sqrt{-t+2} + 1). \end{aligned}$$

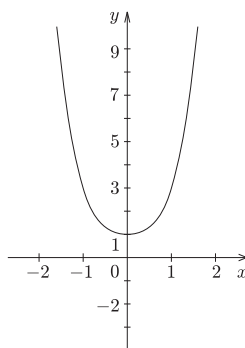
Végül ha $t \leq -2$, akkor (3)-ból

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 - 1)^2 - (-t-2)x^2 = (x^2 - 1)^2 - (x\sqrt{-t-2})^2 = \\ &= (x^2 + x\sqrt{-t-2} - 1)(x^2 - x\sqrt{-t-2} - 1). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ha $t < -2$, akkor $p(x)$ három lényegesen különböző módon is felbontható két másodfokú polinom szorzatára. Ha $t = -2$, azaz $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, akkor kétféle felbontás van, $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 1) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$, végül ha $t > -2$, akkor csak egy felbontás létezik: ezt $t \geq 2$ esetén az (1) alakból kapjuk, ha pedig $-2 < t < 2$, akkor a (2)-ből.

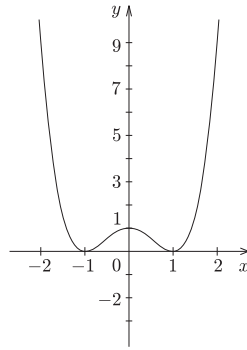
Megjegyzések. 1. Adott $p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ felbontásból kiindulva természetesen végtelen sok felbontást kaphatunk, ha az egyik tényezőt megszorozzuk egy nullától különböző számmal, a másikat pedig elosztjuk vele. Az ilyen felbontásokat azonban érthető módon nem tekintjük lényegesen különbözőnek.

2. A többféle felbontás megléte azon múlik, hogy hány valós gyöke van a $p(x) = 0$ egyenletnek. Könnyen igazolható, – például az egyenlet megoldásával vagy a $p(x)$ grafikonjának fölrázolásával, – hogy ha $t > -2$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke (1. ábra). Ilyenkor a négy komplex gyök két párba sorolható, ahol a párok tagjai egymás konjugáltjai. A megfelelő gyöktényezőket csak egyféleképpen lehet úgy párba állítani, hogy a szorzatuk valós együtthatós másodfokú polinom legyen.



1. ábra

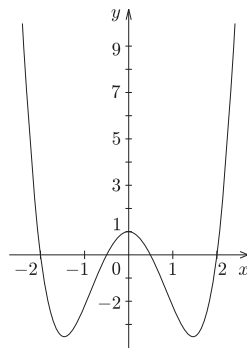
Ha $t = -2$, akkor a $p(x) = 0$ egyenletnek két kétszeres valós gyöke van (2. ábra). Ekkor a gyöktényezőkből három másodfokú polinom építhető: $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(x-1)$ és $(x+1)(x+1)$. Az utóbbi kettő csak egymással szorozható, az első pedig önmagával, így ebben az esetben kétféle felbontást kapunk.



2. ábra

Végül ha $t < -2$, akkor a $p(x) = 0$ egyenletnek négy különböző valós gyöke van (3. ábra). Ezek közül bármely kettőhöz tartozó gyöktényezőt összeszorozva $p(x)$ másodfokú valós együttthatós tényezőjét kapjuk, ilyenkor háromféle szorzat-alak létezik. Ha például $t = -\frac{17}{4}$, akkor a $p(x) = x^4 - \frac{17}{4}x^2 + 1$ polinom gyökei: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, a háromféle szorzat-alak pedig:

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2 - 4) = \left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right)\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = \\ &= \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right). \end{aligned}$$



3. ábra