I. megoldás. Megmutatjuk, hogy létezik a megfelelő tulajdonságú polinom. Adott $f(x)$ polinomra jelölje a k-szorosan összetett $f\big(f\big(\dots f(x)\dots\big)\big)$ polinomot $f_k(x)$. Ekkor elegendő, ha tetszőleges k-ra m és $f_k(m)$ minden m egészre relatív prímek, hiszen a feladat sorozatának bármely két tagja ilyen alakú.

Ha $m = f(0)$, a polinom konstans tagja, akkor $f(m)$ többszöröse m-nek. Ha a konstans tagot 1-nek választjuk, akkor ezzel annyit legalábbis elérünk, hogy $\big(m; f(m)\big) = 1$ teljesüljön minden m egészre, mégpedig úgy, hogy $f(m) = q\cdot m+1$, ahol q egész szám.

Nézzük meg, mit kapunk, ha az $M = q \cdot m + 1$ értéket helyettesítjük, azaz $f\big(f(m)\big) = f(M)$ értékét számoljuk ki. Ha $i > 0$, akkor a binomiális tétel szerint $(q \cdot m + 1)^i = q' \cdot m + 1$, ahol q' is egész szám. Tetszőleges egész együtthatós $f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ polinomra tehát $f(M) = Q\cdot m+a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$, ahol Q egész szám. Ha tehát a polinom együtthatóinak az összegét, az $f(1)$ értéket is 1-nek választjuk, akkor $M = q \cdot m + 1$-ből $f(M) = m \cdot Q + 1$ következik. Innen pedig indukcióval nyomban adódik, hogy minden k-ra $f_k(m) = m \cdot Q_k + 1$, ahol Q_k egész szám.

Ilyenkor pedig m és $f_k(m)$ valóban relatív prímek.

Feltételünk tehát $f(0) = f(1) = 1$, ez pedig nyilván minden legalább másodfokú polinomra teljesíthető, egy 2003-adfokú megoldás $f(x) = x^{2003} - x + 1$.

II. megoldás. Használjuk az előző megoldás jelöléseit. Ismeretes, hogy ha $f(x)$ egész együtthatós polinom, m és n pedig tetszőleges egész számok, akkor $m - n \mid f(m) - f(n)$, azaz $m \mid f(m) - f(0)$ és $m - 1 \mid f(m) - f(1)$. Ha $f(0) = f(1) = 1$, akkor innen

$$m \mid f(m) - 1, \qquad \text{illetve} \tag{1}$$

$$m - 1 \mid f(m) - 1 \tag{2}$$

adódik.

Ha most (2)-ben m helyére $f(m)$-et írunk, akkor $f(m)-1 \mid f\big(f(m)\big)-1$, amit (1)-gyel összevetve $m \mid f\big(f(m)\big)-1$, ahonnan teljes indukcióval $m \mid f_k(m)-1$ adódik minden pozitív egész k-ra. Ez pedig azt jelenti, hogy m és $f_k(m)$ minden k-ra relatív prímek, amiből az első megoldás bevezetőjében mondottak szerint következik a megkövetelt tulajdonság.

$f(0) = f(1) = 1$ pontosan akkor teljesül, ha $x(x-1) \mid f(x)-1$, azaz $f(x) = g(x)\cdot x(x-1)+1$, ahol $g(x)$ tetszőleges egész együtthatós polinom.

A keresett polinom fokszámára vonatkozó feltétel pedig nyilván teljesül, ha $g(x)$ tetszőleges 2001-edfokú polinom. Az is látszik, hogy a legalább másodfokú polinomok között mindig található a megadott tulajdonságú.