

**Megoldás.** Vegyük észre, hogy az  $a_n$  sorozat minden eleme páratlan. Rögzítsük az  $n$  értékét és tekintsük a sorozat  $a_n$ -nel kezdődő elemeinek  $a_n$  szerinti maradékait; legyen ez a  $b$  sorozat. A sorozat első eleme  $b_n$ , ami nyilván 0.

Azt kell bebizonyítanunk, hogy létezik olyan  $n$ -től különböző  $k$ , amelyre szintén igaz, hogy  $b_k = 0$ . (Ez jelenti azt, hogy  $a_k$  osztható  $a_n$ -nel.)

A  $b$  sorozat véges sok értéket vehet fel ( $0 \leq b_i \leq a_n - 1$ ), mert értékei az  $a_n$  szerinti osztás maradékai. Mivel azonban  $b_n$  végtelen sorozat, azért biztosan lesz olyan érték, amelyet végtelen sokszor vesz fel. Tegyük fel, hogy  $b_s = b_{s+t}$ . A rekurzív képzési szabály miatt az  $s$ -edik elemtől és az  $(s+t)$ -edik elemtől a maradékok ugyanúgy folytatódnak, tehát a  $b$  sorozat az  $s$  indextől kezdve biztosan periodikus. Ettől azonban még nem lenne feltétlenül szükséges, hogy ebben a periódusban szerepeljen a 0 maradék.

Vizsgáljuk visszafelé a maradékokat:  $b_s$  a  $2b_{s-1} + 1$ , míg  $b_{s+t}$  a  $2b_{s+t-1} + 1$  elemnek az  $a_n$  szerinti maradékával egyenlő. De ha  $2b_{s-1} + 1$  és  $2b_{s+t-1} + 1$  ugyanazt a maradékot adja egy páratlan számmal ( $a_n$ -nel) osztva, akkor  $a_n$  osztja a különbségüket:

$$a_n \mid 2(b_{s+t-1} - b_{s-1}).$$

Az  $a_n$  páratlan lévén,  $a_n \mid (b_{s+t-1} - b_{s-1})$ , tehát ugyanazt a maradékot adják  $a_n$ -nel osztva, azaz  $b_{s-1} = b_{s+t-1}$ .

Ez azt jelenti, hogy  $b_s$ -től visszafelé is periodikusak a maradékok egészen  $b_n$ -ig, vagyis a 0 is végtelen sokszor ismétlődő maradék.