Megoldás. Legyen $\alpha = \operatorname{arctg} u$, $\beta = \operatorname{arctg} v$ és $\gamma = \operatorname{arctg} w$. Ekkor az $x^3 - 10x + 11 = 0$ egyenlet gyökei $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ és $\operatorname{tg}\gamma$, feladatunk pedig az $\alpha+\beta+\gamma$ összeg meghatározása. Az $x \to \operatorname{arctg} x$ függvény értékkészlete a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum, így $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Az addíciós tétel ismételt alkalmazásával:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}$$

és innen a $\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}$ helyettesítéssel rendezés után kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 - (\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha)}.$$

Az adott egyenlet gyökeivel kifejezve tehát

(1) $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{u+v+w-uvw}{1-(uv+vw+wu)}.$$

Az (1) jobb oldalán álló tört számlálójában és nevezőjében éppen az $x^3 - 10x + 11 = 0$ egyenlet gyökeinek elemi szimmetrikus polinomjai állnak, amelyek a Viète formulák szerint a polinom együtthatóival kifejezhetők:

(2) $$u+v+w = 0, \quad uv+vw+wu = -10, \quad uvw = -11.$$

Innen $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{11}{1+10} = 1$, ezért $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol k adott egész szám, amelynek értékét még meg kell állapítanunk.

(2) szerint a gyökök szorzata negatív, így a negatív gyökök száma páratlan; a gyökök összege nulla, tehát nem lehet mindhárom gyök negatív: pontosan egy negatív és kettő pozitív gyök van. Így α, β és γ közül egy a $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, kettő pedig a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumba esik, így csak $k=0$ lehetséges.

Eredményeink szerint $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v + \operatorname{arctg} w = \frac{\pi}{4}$.

Megjegyzések. 1. Sok hiányos megoldás elégedett meg az $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$ válasszal anélkül, hogy megadta volna k értékét.

2. Hasonlóan igazolható, hogy ha $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ és $\operatorname{tg}\gamma$ az $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ polinom gyökei, akkor $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{-a_1+a_3}{1-a_2}$, illetve teljes indukcióval könnyen bizonyítható (1) általánosításaként, hogy ha az n-edfokú $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ polinom gyökei $\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2, \ldots, \operatorname{tg}\alpha_n$, akkor

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) = \frac{-a_1+a_3-a_5+\ldots}{1-a_2+a_4-\ldots} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^i a_{2i-1}}{\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^i a_{2i}}.$$