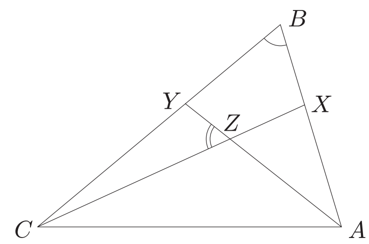
I. megoldás. Legyenek a háromszög szögei a szokásos jelölésekkel α, β, γ. A szinusz-tétel szerint

$$\frac{\sin ABY\sphericalangle}{\sin AYB\sphericalangle}=\frac{AY}{AB}=\frac{CY}{CZ}=\frac{\sin CZY\sphericalangle}{\sin CYZ\sphericalangle}.$$

Mivel $AYB\sphericalangle+CYZ\sphericalangle=180^\circ$, azért a két szög szinusza egyenlő, tehát $\sin ABY\sphericalangle=\sin CZY\sphericalangle$. Mindkét szög 180°-nál kisebb, ezért két eset van.



1. ábra

1. $ABY\sphericalangle=CZY\sphericalangle$. Ekkor a $BXZY$ négyszög szemközti szögeinek összege:

$$ABY\sphericalangle+XZY\sphericalangle=ABY\sphericalangle+180^\circ-CZY\sphericalangle=180^\circ,$$

tehát $BXZY$ húrnégyszög, így csúcsai valóban egy körön vannak.

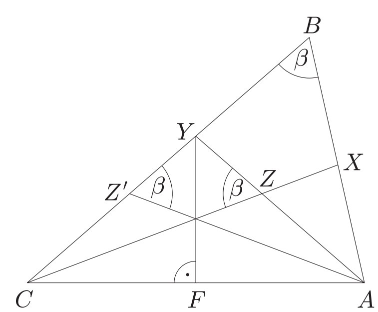
2. $ABY\sphericalangle=180^\circ-CZY\sphericalangle$. Ekkor $ABY\sphericalangle=\beta$, így $AZC\sphericalangle=\beta$. De AYC egyenlő szárú háromszög, mert $AY=YC$, ezért $CAY\sphericalangle=\gamma$, és $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ miatt $ZCA\sphericalangle=\alpha$. Viszont X és Y belső pontok, ezért $\alpha=BAC\sphericalangle>YAC\sphericalangle=\gamma$ és $\gamma=BCA\sphericalangle>ZCA\sphericalangle=\alpha$. Az egyenlőtlenségek élesek, ezért ez az eset nem lehetséges. Más eset nincs, az állítást beláttuk.

Megjegyzés. Mivel a Z pont a háromszög belsejében van, $AZC\sphericalangle>AXC\sphericalangle>ABC\sphericalangle$, tehát a 2. eset nem fordulhat elő.

II. megoldás. Mivel $AY=YC$, azért az AYC háromszög egyenlő szárú, alapja AC; legyen AC felezőpontja F. Mivel AYC egyenlő szárú háromszög, azért YF a szimmetriatengelye. Tükrözzük YF-re az AYC háromszöget. Ekkor C képe A, Z képe Z' és $AZ'=CZ=AB$. Így a BAZ' háromszög is egyenlő szárú, ezért az alapon fekvő szögei egyenlők: $ABZ'\sphericalangle=AZ'B\sphericalangle=\beta$. A tükrözés miatt $YZ'A\sphericalangle=YZC\sphericalangle=\beta$, és így $YZX\sphericalangle=180^\circ-\beta$. A $BXZY$ négyszög két szemközti szögének összege:

$$YBX\sphericalangle+YZX\sphericalangle=\beta+180^\circ-\beta=180^\circ,$$

így a $BXZY$ négyszög húrnégyszög, B, X, Y, Z valóban egy körön vannak.



2. ábra

Megjegyzés: A megoldásból látható, hogy a megadott feltételek csak akkor teljesülhetnek, ha az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge hegyesszög.