Megoldás. Az n-jegyű egész számra írjuk fel a feltételt:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1} = \frac{3}{2} \cdot a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_2 a_1, \tag{1}$$

ahol $a_i \neq 0$ és $1 \le a_i \le 9$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Mivel egyik számjegy sem lehet 0 – hiszen akkor a jobb oldalon 0 állna –, igaz az alábbi két egyenlőtlenség is:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1} > \overline{a_n \underbrace{00\dots0}_{n-1}} = a_n \cdot 10^{n-1}, \quad \text{és}$$

$$\frac{3}{2} \cdot a_n \cdot 9^{n-1} \ge \frac{3}{2} \cdot a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_2 \cdot a_1.$$

E két egyenlőtlenséget összevetve az (1) egyenlettel kapjuk, hogy

$$\frac{3}{2} \cdot a_n \cdot 9^{n-1} > a_n \cdot 10^{n-1}.$$

Osztva $a_n \neq 0$-val kapjuk, hogy $\frac{3}{2} > \left(\frac{10}{9}\right)^{n-1}$. Innen, mivel az exponenciális függvény 1-nél nagyobb alap esetén szigorúan monoton nő, kapjuk, hogy

$$(n-1) \cdot \lg \frac{10}{9} < \lg \frac{3}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad n < \frac{\lg \frac{3}{2} + \lg \frac{10}{9}}{\lg \frac{10}{9}} \approx 4{,}848.$$

A feladat megoldásait eszerint a legfeljebb 4-jegyű számok között kell keresnünk.

Az egyjegyű számokra nyilván nem teljesül a feltétel. Kétjegyű számokra az állítás:

$$\overline{a_2 a_1} = \frac{3}{2} \cdot a_2 \cdot a_1.$$

Rendezve az egyenletet:

$$a_2 = \frac{2\, a_1}{3\, a_1 - 20}. \tag{2}$$

Mivel $0 < a_1$ és $0 < a_2$, azért $3\,a_1 - 20 > 0$, így $3\,a_1 > 20$. A lehetséges értékek: $a_1 = 7$, 8 vagy 9. Helyettesítve (2)-be: $a_2 = \frac{14}{1}$, nem egyjegyű, $a_2 = \frac{16}{24-20} = 4$ és $a_2 = \frac{18}{7}$ nem egész. Csak $a_1 = 8$ esetén kapunk megoldást, s ekkor $a_2 = 4$, és valóban: $48 = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 8$.

Háromjegyű számokra:

$$\overline{a_3 a_2 a_1} = \frac{3}{2} \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1, \quad \text{ahonnan} \quad a_3 = \frac{20\, a_2 + 2\, a_1}{3 \cdot a_2 \cdot a_1 - 200}.$$

Mivel $a_3 > 0$, az $a_2 a_1 \ge 67$ feltételből a következő lehetséges értékeket kapjuk: $a_1 = 8$, $a_2 = 9$; $a_1 = 9$, $a_2 = 8$; $a_1 = 9$ és $a_2 = 9$. Helyettesítéssel kiderül, hogy egyik esetben sem kapunk a_3-ra egyjegyű egész értéket.

Végül négyjegyű számok esetén, hasonlóan:

$$a_4 = \frac{200\, a_3 + 20\, a_2 + 2\, a_1}{3 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - 2000}.$$

Innen $a_3 a_2 a_1 \ge 667$, ami csak $a_3 = a_2 = a_1 = 9$-re teljesül, de ez sem ad a_4-re egész megoldást.

A feladat egyetlen megoldása a 48.