Megoldás. Jelöljük a hatszög oldalélének hosszát R-rel, a hatszög közepén ülő töltést pedig q-val! (Ez a töltés nyilván *ellenkező* előjelű, mint a csúcsokban elhelyezkedő töltések.) A hatszög egy-egy csúcsában levő töltésre hat a középső töltés

$$-k\frac{Qq}{R^2}$$

nagyságú vonzóereje, valamint a többi töltés taszítóereje (*1. ábra*). Ez utóbbiak „sugárirányú” komponensei rendre

$$\frac{1}{2}\cdot k\frac{Q^2}{R^2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot k\frac{Q^2}{\left(\sqrt{3}R\right)^2}, \qquad k\frac{Q^2}{\left(2R\right)^2}.$$

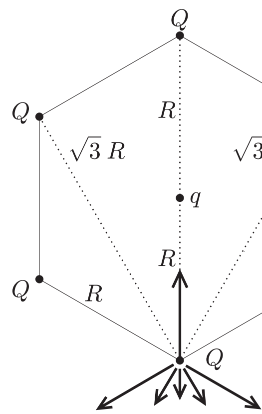
Az egyensúly feltétele:

$$k\frac{Qq}{R^2}+k\frac{Q^2}{R^2}\left(2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{4}\right)=0,$$

ebből

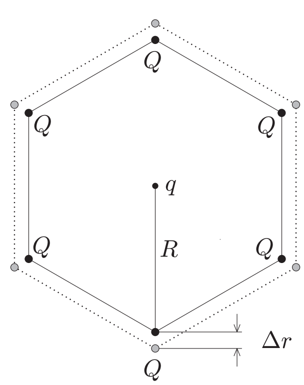
$$q=-Q\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx -1{,}83\ Q.$$

Figyelemre méltó, hogy az egyensúly feltétele nem függ a hatszög méretétől.



1. ábra

Milyen típusú ez az egyensúly? Ennek a kérdésnek eldöntéséhez vizsgáljuk meg, hogy ha valamelyik töltést egy *kicsit* kimozdítjuk az egyensúlyi helyzetéből, vajon visszatér-e oda. Mozdítsuk ki például az egyik csúcsban ülő töltést sugárirányban Δr távolsággal (a *2. ábrán* látható módon), a többi töltés pedig maradjon az eredeti helyén. A kimozdított töltésre ható eredő erő akkor lenne nulla, ha a többi csúcsponti töltés is $R+\Delta r$ távol lenne q-tól, vagyis egy megnövelt oldalhosszú szabályos hatszög csúcsaiban helyezkedne el (hiszen mint láttuk, az egyensúly feltétele nem függ a hatszög méretétől). Most azonban a többi 5 csúcsponti töltés nem mozdult el, így az általuk kifejtett vonzóerő nagyobb, mint amekkora az egyensúly esetén lenne (hiszen közelebb vannak a kimozdított töltéshez, mint egyensúly esetén, és az erők hatásvonala is kisebb szöget zár be az eredő erő irányát megadó szimmetriatengellyel). Ez annyit jelent, hogy a kimozdított töltésre ható taszítóerő nagyobb, mint amekkora az egyensúlyhoz szükséges lenne, tehát az eredő erő kifelé mutat: az egyensúly *labilis.*



2. ábra

Hasonló eredményre jutunk akkor is, ha a középső töltést mozdítjuk ki egy kicsit. A hatszög középpontja akkor lenne q stabil egyensúlyi helyzete, ha annak kis környezetében a ***többi*** töltés által létrehozott elektromos mező iránya ($q > 0$ esetén) mindenhol a középpont felé ($q < 0$ esetén pedig éppen ellentétesen) mutatna. Ez azonban nem lehetséges, hiszen a hatszög középpontját körülfogó kicsiny zárt felületen (például egy kicsiny gömbfelületen) áthaladó elektromos fluxus – Gauss törvénye szerint – a körülvett töltéssel arányos, tehát nulla kell legyen. (Ne feledjük, hogy csak a ***többi*** töltés által létrehozott elektromos mezőt, illetve ezek fluxusát vizsgáljuk.) Általánosan igaz: egy ponttöltés sosem lehet stabil egyensúlyi helyzetben más pontszerű töltések elektrosztatikus erőterében!

Hátra van még a rendszer elektrosztatikus energiájának kiszámítása. Az egyik csúcsbeli töltés helyén a többi 6 töltés által létrehozott potenciál:

$$U_1 = 2 \cdot k\frac{Q}{R} + 2 \cdot k\frac{Q}{\sqrt{3}R} + k\frac{Q}{2R} - k\frac{q}{R} = \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot k\frac{Q}{R} + k\frac{q}{R} = -k\frac{q}{R},$$

így egyetlen csúcsbeli töltés energiája a többiek terében $E_1 = -k\dfrac{Qq}{R}$. A középpontban a csúcsponti töltések által létrehozott potenciál

$$U_2 = 6k\frac{Q}{R},$$

így a középponti töltés energiája a többi töltés terében $E_2 = 6k\dfrac{qQ}{R}$. A rendszer összenergiája

$$\sum E = \frac{1}{2}\,(6E_1 + E_2) = -3k\frac{qQ}{R} + 3k\frac{qQ}{R} = 0.$$

(A fenti képletben szereplő $\dfrac{1}{2}$-es szorzótényezőre azért van szükség, mert ha minden töltés energiáját kiszámítjuk a többi töltés terében, majd ezeket az energiákat összeadjuk, akkor a párkölcsönhatások mindegyikét 2-szer vesszük figyelembe.)

Megjegyzés. Hosszabb számolás nélkül is beláthatjuk, hogy a vizsgált rendszer elektrosztatikus összenergiája nulla. A hatszög alakban elrendezett töltések – megfelelő nagyságú középső töltés esetén – egyensúlyban vannak, tehát tetszőlegesen kicsiny erőhatással elmozdíthatók. Mozgassuk el a töltéseket úgy, hogy továbbra is egy szabályos (az eredetinél kicsit nagyobb) hatszöget alkossanak. Ez az elrendezés ismét egyensúlyi lesz, hiszen a hatszög mérete nem szerepel az erőegyensúly képletében, tehát még tovább növelhető, méghozzá munkavégzés nélkül. Az eljárást egészen addig folytathatjuk, míg a töltések egymástól is és a középső q töltéstől is nagyon messze („végtelen távolra") kerülnek. Ekkor a rendszer kölcsönhatási energiája nulla lesz, és mivel a folyamat során nem kellett munkát végezzünk, ugyanennyi kellett legyen a rendszer energiája kezdetben is.

Ez az érdekes összefüggés nem csak a hatszöges elrendezésre érvényes, hanem általánosabban is igaz: egy töltésrendszer elektrosztatikus összenergiája nulla, ha a rendszer elemei (az elektrosztatikus erőhatások szempontjából) egyensúlyban vannak.