A feladatra két megoldást mutatunk; mindkét megoldás felhasználja az $[x]+[y]\le[x+y]$ egyenlőtlenséget, amely tetszőleges x, y valós számok esetén teljesül.

I. megoldás. Bebizonyítjuk a következő – a feladat állításánál általánosabb – tételt:

Ha az $a_1\le\ldots\le a_n$ valós számokra $a_1+2a_2+\ldots+na_n=0$ és x tetszőleges valós szám, akkor

$$a_1[x]+a_2[2x]+\ldots+a_n[nx]\ge 0. \tag{2}$$

Abban az esetben, amikor $a_1=-1$, $a_2=-\dfrac{1}{2}$, $\ldots$, $a_{n-1}=-\dfrac{1}{n-1}$ és $a_n=1-\dfrac{1}{n}$, a tétel éppen a feladat állítását adja.

A tételt teljes indukcióval igazoljuk. Az $n=1$ esetben a feltétel szerint $a_1=0$, és az $a_1[x]\ge0$ egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Tegyük most fel, hogy n valamely értékére az állítás igaz; ebből bebizonyítjuk az 1-gyel nagyobb értékre is. Legyenek tehát $a_1\le\ldots\le a_{n+1}$ olyan valós számok, amelyekre $a_1+2a_2+\ldots+(n+1)a_{n+1}=0$ és x tetszőleges valós szám. Alakítsuk át (2) baloldalát a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_i[ix]=\frac{a_{n+1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\big[(n+1)x\big]-[ix]-\big[(n+1-i)x\big]\Big)+ \tag{3}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{2a_{n+1}}{n}\right)[ix].$$

A feltételekből következik, hogy a_{n+1} nemnegatív; ellenkező esetben ugyanis a rendezés miatt $a_1,\ldots,a_{n+1}$ mindegyike negatív lenne, de akkor $a_1+2a_2+\ldots+(n+1)a_{n+1}$ nem lehetne 0. Az $[a]+[b]\le[a+b]$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\big[(n+1)x\big]-[ix]-\big[(n+1-i)x\big]\ge0$; az összeg első fele tehát nemnegatív. Az összeg második feléről az indukciós feltevés felhasználásával igazoljuk ugyanezt. Legyen tetszőleges $1\le i\le n$ esetén $b_i=a_i+\dfrac{2a_{n+1}}{n}$. Ezekre a számokra teljesül, hogy $b_1\le\ldots\le b_n$, és

$$\sum_{i=1}^{n}ib_i=\sum_{i=1}^{n}i\left(a_i+\frac{2a_{n+1}}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}ia_i+\frac{2}{n}(1+2+\ldots+n)a_{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}ia_i=0.$$

Ezért, az indukciós feltevés alapján,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{2a_{n+1}}{n}\right)[ix]=\sum_{i=1}^{n}b_i[ix]\ge0.$$

A (3) azonosság jobb oldalán tehát csupa nemnegatív számot adtunk össze, ezzel igazoltuk, hogy $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}a_i[ix]\ge0$.

II. megoldás. Az $[x]+[y]\le[x+y]$ egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy ha az $a_1,\ldots,a_k$ pozitív egész számok összege n, akkor

$$[a_1x]+\ldots+[a_kx]\le[nx]. \tag{4}$$

Jelöljük P_n-nel az olyan véges hosszúságú, pozitív egészekből álló számsorozatok halmazát, amelyekben az elemek összege n. A sorozatok hosszára nincs megkötés, P_n tartalmazza az egyetlen elemből álló (n) sorozatot éppen úgy, mint az n elemből álló $(1,1,\ldots,1)$-et. Például $P_3=\big\{(1,1,1),(1,2),(2,1),(3)\big\}$.

A (4) egyenlőtlenséget P_n összes elemére felírhatjuk. A bizonyítandó (1)-et az így kapott egyenlőtlenségek lineáris kombinációjaként fogjuk előállítani.

Válasszuk ki P_n egy elemét a következőképpen: az első számot, a_1-et véletlenszerűen választjuk az $1,\ldots,n$ számok közül; ezután a második számot, a_2-t véletlenszerűen választjuk az $1,2,\ldots,n-a_1$ számok közül és így tovább egészen addig, amíg el nem érjük az n összeget. Más szóval, az $(a_1,\ldots,a_k)$ sorozat kiválasztásának valószínűsége

$$\begin{aligned}p(a_1,\ldots,a_k)&=\frac{1}{n\cdot(n-a_1)\cdot(n-a_1-a_2)\cdot\ldots\cdot(n-a_1-\ldots-a_{k-1})}=\\&=\frac{1}{(a_1+\ldots+a_k)\cdot(a_2+\ldots+a_n)\cdot\ldots\cdot(a_{k-1}+a_k)\cdot a_k}.\end{aligned}$$

Az összes sorozat valószínűségének összege természetesen 1. Minden egyes sorozatra szorozzuk meg a (4) egyenlőtlenséget $p(a_1,\ldots,a_k)$-val és az így kapott egyenlőtlenségeket adjuk össze. Azt állítjuk, hogy eredményül éppen a bizonyítandó (1)-et kapjuk.

Az egyenlőtlenségek összegének jobboldalán éppen $[nx]$ áll, mert a valószínűségek összege 1. Azt, hogy a baloldalon $\sum_{j=1}^{n} \frac{[jx]}{j}$ áll, teljes indukcióval igazoljuk. Az $n=1$ esetben ez az állítás triviális, mert csupán egyetlen 1-esből álló sorozat létezik és ezt 1 valószínűséggel választjuk ki. Legyen tehát $n>1$ és tegyük fel, hogy kisebb értékekre az állításunk igaz. Csoportosítsuk P_n elemeit az első elem szerint szerint, különválasztva az egyetlen n-esből álló sorozatot, majd alkalmazzuk az indukciós feltevést:

$$\sum_{(a_1,\dots,a_k)\in P_n} p(a_1,\dots,a_k)\big([a_1x]+\ldots+[a_kx]\big) =$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n-1} \sum_{(a_2,\dots,a_k)\in P_{n-a_1}} \frac{[a_1x]+\big([a_2x]+\ldots+[a_kx]\big)}{\underbrace{(a_1+\ldots+a_k)}_{n}\cdot(a_2+\ldots+a_k)\cdot\ldots\cdot a_k} + \frac{[nx]}{n} =$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n-1} \frac{[a_1x]}{n} \sum_{(a_2,\dots,a_k)\in P_{n-a_1}} \frac{1}{(a_2+\ldots+a_k)\cdot\ldots\cdot a_k} +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{a_1=1}^{n-1} \sum_{(a_2,\dots,a_k)\in P_{n-a_1}} \frac{[a_2x]+\ldots+[a_kx]}{(a_2+\ldots+a_k)\cdot\ldots\cdot a_k} + \frac{[nx]}{n} =$$

$$= \sum_{a_1=1}^{n-1} \frac{[a_1x]}{n}\cdot 1 + \frac{1}{n}\sum_{a_1=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-a_1}\frac{[jx]}{j} + \frac{[nx]}{n} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{[jx]}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{a_1=1}^{n-j}\frac{[jx]}{j} + \frac{[nx]}{n} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-j}{nj}\right)[jx] + \frac{[nx]}{n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{[jx]}{j}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.