I. megoldás. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban azt a számhalmazt, amely egy H számhalmaz elemeinek a k-szorosából áll, kH-val jelöljük. A feladat feltétele így $\alpha A = \beta B$, miközben az $\frac{1}{\beta}\alpha A = B$ és az $\frac{1}{\alpha}\beta B = A$ halmazok a pozitív egészek közös elem nélküli előállítását adják. Megmutatjuk, hogy a megfelelő számpárok olyanok, hogy egyikük a másik valódi osztója, továbbá ezek mind megfelelőek.

Először azt látjuk be, hogy a nem ilyen tulajdonságú számpárokra nem valósítható meg a pozitív egészek megfelelő szétválasztása. Elsőként legyen $\alpha = \beta$. Ilyenkor nyilván nem valósítható meg a kívánt szétosztás, hiszen ekkor az $\alpha A = \beta B$ egyenlőségből az A és B halmazok egyenlősége következik. A szimmetria miatt ezután föltehető, hogy $\alpha < \beta$, és persze, ha $(\alpha;\beta)$ jó számpár, akkor $(\beta;\alpha)$ is az.

Nyilvánvaló, hogy ha k tetszőleges pozitív egész és $(\alpha;\beta)$ jó számpár, akkor $(k\alpha;k\beta)$ is az, hiszen a megadott halmazok csak k-val szorzódnak. Ennek a tulajdonságnak a megfordítása is igaz: ha k a jó $(\alpha;\beta)$ közös osztója, akkor az $\left(\frac{\alpha}{k};\frac{\beta}{k}\right)$ számpár is jó. Ezek szerint elegendő megtalálni a relatív prím jó számpárokat.

Legyen tehát $(\alpha;\beta) = 1$, és tegyük fel, hogy $1 \in A$. Ekkor $\alpha \cdot 1 = \alpha \in \alpha A$. Mivel ennek a halmaznak minden eleme βb alakban is előáll, azért $1 \notin B$ miatt α legalább 2β. Ez viszont nem lehetséges, hiszen föltevésünk szerint $\alpha < \beta$. Így csak $1 \in B$ lehetséges. Ekkor $\beta \cdot 1 = \beta \in \beta B = \alpha A$, azaz β az α többszöröse. Mivel feltettük, hogy relatív prímek, ez csak úgy lehetséges, ha α=1. Ezzel tehát beláttuk, hogy a relatív prím $\alpha < \beta$ megoldásokra $\alpha = 1$, $\beta > 1$ szükséges.

Most megmutatjuk, hogy ez elégséges is, minden ilyen számpárhoz létezik megfelelő felosztás. Egyszerűen megadjuk a kívánt tulajdonságú halmazokat. Legyenek A elemei az $m \cdot \beta^{2k+1}$ alakú számok, ahol k tetszőleges nemnegatív egész, és m olyan egész szám, amit β már nem oszt. Az $m \cdot \beta^{2k}$ alakú számok pedig legyenek B elemei. A számelmélet alaptétele szerint így minden pozitív egész a két halmaz közül pontosan az egyikbe került, továbbá a B halmaz elemeit β-val szorozva valóban az A-beli elemeket kapjuk és megfordítva. (Továbbra is $\alpha = 1$.)

A jó relatív prím számpárok tehát valóban olyanok, hogy $(\alpha;\beta)$ egyike 1, másika 1-nél nagyobb tetszőleges egész. Az összes megfelelő számpár pedig az ilyenek pozitív egész többszörösei, tehát azok, ahol a számpár egyik tagja valódi osztója a másiknak.

II. megoldás. $\alpha = \beta$-t az előző megoldás szerint kizárhatjuk. Legyen $\frac{\alpha}{\beta}$ először 1-nél nagyobb *egész* szám; megmutatjuk, hogy ilyenkor van megfelelő szétosztás. A következő algoritmus szerint haladjunk sorra a pozitív egész számokon: ha a soron következő k számot még nem helyeztük el, akkor tegyük az A-ba, az $\frac{\alpha}{\beta}$-szorosát pedig a B-be. Ez azt jelenti, hogy első lépésben az 1, ami természetesen még nem került helyre, az A-ba kerül, $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ pedig B-be. Az eljárás egyértelmű, és minden pozitív szám bekerül a két halmaz egyikébe. Mivel ezzel $B = \frac{\alpha}{\beta}A$, nyilván teljesül a feladatban előírt $\alpha A = \beta B$ egyenlőség. (Érdemes meggondolni, milyen algebrai tulajdonságai vannak a halmaz számmal való szorzása műveletnek.) Hasonlóan adódik a felosztás, ha $\frac{\beta}{\alpha}$ 1-nél nagyobb egész.

Még azt kell megmutatnunk, hogy ha sem $\frac{\alpha}{\beta}$, sem $\frac{\beta}{\alpha}$ nem egész, akkor nincsen megfelelő szétosztás. Legyen p olyan prím, amely sem α-nak, sem pedig β-nak nem osztója. Ha lenne megfelelő szétosztás, akkor p-nek is ott kellene lennie az egyik halmazban, például A-ban. Ekkor $\alpha \cdot p \in \alpha A = \beta B$, tehát $\frac{\alpha p}{\beta} \in B$. Ez viszont nem lehetséges, hiszen feltevésünk szerint β és αp relatív prímek, tehát ez a tört nem egész szám. Hasonlóan kapjuk, hogy p a B halmazban sem lehet.