

**Megoldás.** Feltehető, hogy  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Írjuk fel  $\gamma$ -t  $180^\circ - (\alpha + \beta)$  alakban. Ezzel az eredeti egyenlet  $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos(180^\circ - (3\alpha + 3\beta)) = 1$  alakú lesz. Azonos átalakításokkal:  $\cos 3\alpha + \cos 3\beta = 1 + \cos(3\alpha + 3\beta)$ . A bal oldalon a  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ , a jobb oldalon pedig az  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$  összefüggéseket felhasználva:

$$2 \cos \frac{3\alpha + 3\beta}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha - 3\beta}{2} = 2 \cos^2 \frac{3\alpha + 3\beta}{2}$$

adódik.

Az egyenlet további azonos átalakításával azt kapjuk, hogy

$$\cos \frac{3\alpha + 3\beta}{2} \cdot \left( \cos \frac{3\alpha + 3\beta}{2} - \cos \frac{3\alpha - 3\beta}{2} \right) = 0.$$

A zárójeles kifejezésre a  $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \cdot \sin y$  összefüggést alkalmazva egy 0-val egyenlő szorzatot kapunk:  $-2 \cos \frac{3\alpha + 3\beta}{2} \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{3\beta}{2} = 0$ . Tekintettel arra, hogy sem  $\alpha$ , sem  $\beta$  nem lehet  $90^\circ$ -nál nagyobb és biztosan pozitívak, hiszen egy háromszög két kisebbik szöge, a  $\frac{3\alpha}{2}$  és a  $\frac{3\beta}{2}$  szögek szinusza nem lehet 0.

$\cos \frac{3\alpha + 3\beta}{2}$  viszont lehet 0. A szögekre kirótt feltételek miatt  $\frac{3}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ$ , vagyis  $\alpha + \beta = 60^\circ$ . A  $\gamma$  szög tehát valóban  $120^\circ$ -os.