Megoldás. Használjuk a függvényre kirótt feltétellel ekvivalens

$$2f\left(\frac{x+y}{3}\right)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

alakot.

Helyettesítsünk y helyébe $2x$-et, ahol $x>0$: $2f\left(\frac{x+2x}{3}\right)=f(x)+f(2x)$, ebből $f(x)=f(2x)$, és ez teljesül minden $x>0$-ra. Ezért például

$$f(x)=f(2x)=f(4x). \tag{2}$$

Írjunk most az (1) összefüggésben x és y helyére is $3x$-et, $x>0$-val:

$$2f(2x)=f(3x)+f(3x),$$

innen

$$f(2x)=f(3x). \tag{3}$$

(2)-ből és (3)-ból következik, hogy

$$f(x)=f(2x)=f(3x)=f(4x)$$

tetszőleges $x>0$-ra.

Speciálisan $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy pozitív egész számokra minden függvényérték $f(1)$-gyel egyenlő.

Tegyük fel, hogy 1-től $(n-1)$-ig $(n-1>3)$ minden k számra igaz, hogy $f(k)=f(1)$. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $f(n)=f(1)$.

Ha $n=3m+d$, ahol $d=0$, 1 vagy 2, akkor az $x=3m+d$, $y=3-d$ helyettesítéssel $x+y=3m+3$, tehát $2f(m+1)=f(3m+d)+f(3-d)$.

Mivel $3-d=3$, 2 vagy 1, így $f(3-d)=f(1)$, továbbá $0<m+1<n$, hiszen $n=3m+d$, ezért teljesül rá az indukciós feltétel, tehát $f(m+1)=f(1)$, ebből következik, hogy $2f(1)=f(3m+d)+f(1)$, azaz $f(n)=f(1)$.

Vizsgáljuk most a negatív egészeken felvett értékeket!

Legyen tetszőleges pozitív n esetén $x=-n$, $y=n+3$. Ekkor $x+y=3$, $f(n+3)=f(1)$ a korábbi teljes indukció alapján, így $2f(1)=f(-n)+f(1)$, vagyis $f(-n)=f(1)$.

Mindebből az következik, hogy f minden értelmezési tartománybeli helyen ugyanazt az értéket veszi fel.

Minden ilyen függvény eleget is tesz a feltételnek. Tegyük fel, hogy $f(x)=c$ minden nullától különböző x egész számra. Ekkor

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right)=c \qquad \text{és} \qquad \frac{f(x)+f(y)}{2}=c,$$

azaz a konstans függvény valóban meg is felel.