

I. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk, hogy nincsenek ilyen számok.

Tegyük fel, hogy m és n két megfelelő szám: $m < n$ és $m \mid n$.

Ekkor egyrészt $m \mid n - m$, másrészt $9 \mid n - m$, mert m és n számjegyei egyaránt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; számjegyösszegük pedig $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 3 \cdot 9 + 1$. Ez azt jelenti, hogy m és n is 1 maradékot ad 9-cel osztva.

Ekkor m és 9 relatív prímekek, így $9m \mid n - m$. Ez azonban nem lehetséges, mert $9m > n - m$, ugyanis $10m > n$, mivel $10m$ nyolcjegyű szám. (Már $9m$ is nyolcjegyű: $9m \geq 9 \cdot 1\,234\,567 = 11\,111\,103$.)

II. megoldás. Tekintsünk két ilyen számot. Mindkét szám jegyeinek összege 28, ami $3 \cdot 9 + 1$, vagyis 9-cel osztva mindkét szám 1 maradékot ad.

Legyen az egyik szám $9l + 1$, a másik $9k + 1$ (ahol k, l pozitív egész számok). Ha a két szám $\frac{9l + 1}{9k + 1}$ hányadosa egész szám, akkor az legyen $9n + m$ (ahol n pozitív egész, m pedig valamelyik 9-es maradék), vagyis

$$9l + 1 = (9k + 1)(9n + m) = 81kn + 9n + 9mk + m.$$

Látható, hogy $m = 1$, azaz a hányados is 1 maradékot ad 9-cel osztva.

A képezhető legnagyobb szám kisebb, mint 8 millió, a legkisebb pedig nagyobb, mint 1 millió, így a hányados értéke 1 és 7 közé esik. Ez csak úgy lehetséges, ha a hányados 1, vagyis ha a két szám egyenlő. A feladat kérdésére tehát tagadó választ adhatunk.