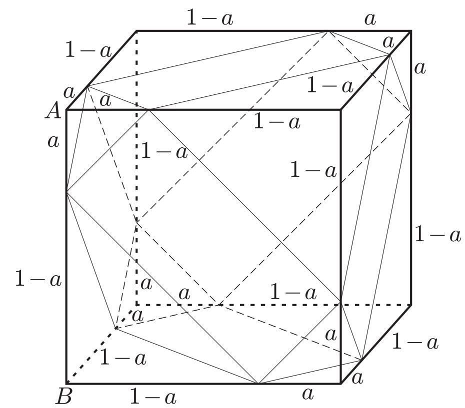
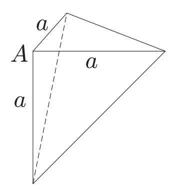
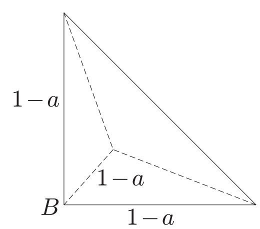
Megoldás. Legyen a kocka oldaléle 1 egység hosszú. Minden élen vegyünk fel egy a oldalhosszúságú szakaszt úgy, hogy a kocka egy-egy csúcsába egyenlő hosszú szakaszok fussanak be. Így a kockából úgy juthatunk el a konvex poliéderhez, ha levágjuk a kocka sarkaiból az ott keletkező gúlákat. Kétféle gúla keletkezik, mindkét fajtából négy-négy. Akkor lesz a poliéder térfogata a kocka térfogatának a fele, ha a gúlák össztérfogata is éppen a kocka térfogatának a fele.







Az egyik fajta gúla térfogata $V_A = \dfrac{a^3}{6}$, a másiké pedig $V_B = \dfrac{(1-a)^3}{6}$. Mivel a gúlák össztérfogatának $\dfrac{1}{2}$-nek kell lennie:

$$4 \cdot V_A + 4 \cdot V_B = \frac{1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad 12a^2 - 12a + 1 = 0.$$

$a_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{6}$, a kapott gyökök 1-nél kisebb pozitív számok (az összegük természetesen 1). Tehát az a-t a_1-nek választva megfelelő konvex poliéderhez jutunk: fel lehet venni a 12 pontot a kocka élein a követelményeknek megfelelően. ($a = a_2$ is lehetne, de így az előbbivel egybevágó megoldást kapunk.)