

**Megoldás.** Legyen a poliéder lapjainak száma  $\ell$ , éleinek száma  $\acute{e}$  és csúcsainak száma  $c$ .

A poliéder minden lapján vegyünk fel egy belső pontot. Ezeket a belső pontokat kössük össze az adott lap csúcsaival. Így kialakul  $2 \cdot \acute{e}$  darab háromszög, mivel minden él két laphoz és így két háromszöghöz tartozik. Eszerint a kialakult háromszögek belső szögeinek összege:  $2 \cdot \acute{e} \cdot 180^\circ$ . A kiválasztott belső pontok körül kialakult  $360^\circ$ -os szögeket most nem kell számolnunk, mivel azok nem részei a feladatban összegzendő szögeknek. A háromszögek többi szöge viszont mind része valamelyik lapon lévő belső szögnek, és a lapokon lévő belső szögek mind le is vannak fedve a háromszögekkel. Tehát a keresett összeghez elég a háromszögek belső szögeinek összegéből levonnunk a lapokon felvett belső pontok körül kialakult  $360^\circ$ -os szögeket, azaz  $\ell \cdot 360^\circ$ -ot. Így  $2 \cdot \acute{e} \cdot 180^\circ - \ell \cdot 360^\circ = (\acute{e} - \ell) \cdot 360^\circ$ -ot kapunk, ami az Euler-féle poliédertétel miatt  $(c + \ell = \acute{e} + 2)$  éppen  $(c - 2) \cdot 360^\circ$ . Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Megjegyzés.* A megoldáshoz nincs szükség az Euler-féle poliéder-tételre. Állítsuk poliéderünket egy lapjára, majd nagyítsuk ezt a lapot egy belső pontjából, a további csúcsok helyzetét pedig úgy változtassuk, hogy a megmaradó test konvex maradjon. Előbb-utóbb elérjük, hogy valamennyi „levegőben lévő” csúcs vetülete a kiszemelt lap belsejébe esik. Levetítve ekkor a csúcsokat, a konvexitás miatt különböző csúcsok vetülete különböző, a kiszemelt lap egy sokszögre történő felbontását kapjuk és eközben a szóban forgó szögösszeg nyilván nem változik.

Egy ilyen síkbeli hálózatban pedig a szögek összege nyilván  $(c_1 - 2) \cdot 360^\circ + c_2 \cdot 360^\circ$ , ahol  $c_1$  a határoló sokszög csúcsainak a száma,  $c_2$  pedig a levetített csúcsoké. Mivel  $c_1 + c_2 = c$ , az állítás valóban teljesül.