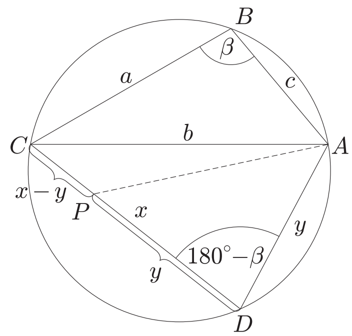
Megoldás. A körvonalon adott három pont három, közös belső pont nélküli körívre osztja a körvonalat. Ezen körívek belső pontjai jöhetnek számításba a keresett érintőnégyszög negyedik csúcsaként. Meg fogjuk mutatni, hogy mindegyik köríven pontosan egy alkalmas pont található.



Válasszuk ki az egyik körívet tetszőlegesen, a körív két végpontját jelölje A és C, a harmadik adott pontot pedig B. A kiszemelt köríven keressük a négyszög negyedik csúcsát, a D pontot.

Az $AD = y$, $CD = x$ jelöléssel teljesül, hogy $a+y = c+x$, azaz $a-c = x-y$, hiszen egy konvex négyszög pontosan akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő.

Ha $a > c$, akkor $x > y$. (Az *ábrán* ez az eset látható.) A CD szakasz P pontja legyen olyan, hogy arra $PD = AD = y$ teljesüljön, így $PC = x-y = a-c$. Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, azért $PDA\sphericalangle = 180^\circ-\beta$, az APD háromszög pedig egyenlő szárú, így $PAD\sphericalangle = APD\sphericalangle = \dfrac{\beta}{2}$. Ezért $APC\sphericalangle = 180^\circ - \dfrac{\beta}{2}$. A P pontból így az AC szakasz $180^\circ - \dfrac{\beta}{2}$ szögben látszik, tehát P rajta van az AC szakasz megfelelő, $180^\circ - \dfrac{\beta}{2}$ szögű látószögkörívén.

Ugyanakkor $CP = a - c$, így P az előbb említett látókörívnek és a C középpontú $a - c$ sugarú körnek a közös pontja.

Ez a metszéspont mindig létrejön és egyértelműen meghatározott, mert a látókörív ($180^\circ - \dfrac{\beta}{2} > 180^\circ - \beta$ miatt) a körülírt körön belül van; $a - c$ pedig kisebb b-nél az ABC háromszögre felírható háromszög-egyenlőtlenség szerint. A P pont tehát szerkeszthető, és segítségével nyilván a D pont is: a C kezdőpontú CP félegyenes és az eredeti kör metszéspontja.

Szerkesztésünk nyilvánvalóan helyes, hiszen a fenti lépések után valóban azt kapjuk az $ABCD$ húrnégyszögre (ami konvex), hogy $c + CD = a + AD$, azaz az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög is egyben.

Ha $a = c$, akkor az ABC töröttvonal bármely „beleírható” körrel együtt tengelyesen szimmetrikus az AC szakasz felező merőlegesére. Így a C pontból és az A pontból egy ilyen körhöz húzott másik érintők is egymás tükörképei erre az egyenesre nézve, vagyis éppen e felezőmerőlegesen metszik egymást. Akkor lesz az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, ha van olyan kör, amelyet a négyszög minden oldala érint. Az eddigiekből következik, hogy ebben az esetben a D pont csak az AC szakasz felező merőlegesén lehet, ez az egyenes metszi ki tehát az eredeti körből D-t. Ekkor deltoidot kapunk.

(Az $a < c$ esetet nem kell tárgyalnunk, hiszen ha nem egyenlő ez a két szakasz, választhatjuk a nagyobbat a-nak a betűzéskor.)

Egyik esetben sem használtuk fel a β szög nagyságát. Szerkesztésünk mindkét esetben tetszőleges nagyságú β szög esetén elvégezhető, tehát akármelyik ívet kiválaszthatjuk a szerkesztés kezdetén. A szerkesztésből kiderül, hogy 1-1 köríven pontosan 1 jó D pont lesz, tehát bármely megadott ponthármashoz három megoldás tartozik.