Megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az origója A legyen, B koordinátái pedig legyenek $(1;0)$. Ekkor $C(c;0)$, ahol $c<0$ rögzített, e egyenlete $X=c$, D koordinátái pedig $(c;d)$, ahol d tetszőleges.

Ezek után P koordinátáit egyszerűen meghatározhatjuk. A BD egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{BD}=(c-1;d)$, tehát egyenlete

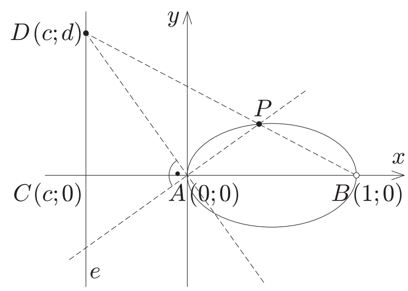
$$dX-(c-1)Y=d. \tag{1}$$

Az AP egyenes egy normálvektora $\overrightarrow{AD}=(c;d)$, tehát egyenlete

$$cX+dY=0. \tag{2}$$

A két egyenes metszéspontja, azaz P koordinátái:

$$P\left(\frac{d^2}{c^2+d^2-c};\frac{cd}{c-c^2-d^2}\right).$$



A keresett mértani hely egyenletét a d paraméter kiküszöbölésével kaphatjuk meg. Az (1) egyenletből következik, hogy P koordinátái kielégítik a

$$dXY-(c-1)Y^2=dY$$

egyenletet is, vagyis a (2)-ből következő $dY=-cX$ összefüggést felhasználva a

$$-cX^2-(c-1)Y^2=-cX$$

egyenletet is. Ezt rendezve

$$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{c-1}{c}Y^2=\frac{1}{4} \tag{3}$$

adódik, ami $c<0$ miatt egy $\mathcal{E}$ ellipszis egyenlete. A P pontok tehát mind rajta vannak az $\mathcal{E}$ ellipszisen, melynek középpontja AB felezőpontja, nagytengelye AB, kistengelyének hossza pedig $\sqrt{\dfrac{c}{c-1}}$.

Mivel $c^2-c>0$, azért minden $0\le k<1$ esetén az $k=\dfrac{d^2}{c^2+d^2-c}$ egyenletnek létezik d-ben megoldása,

$$d=\pm\sqrt{\frac{k(c^2-c)}{1-k}},$$

$k=1$ esetén viszont nincs megfelelő d érték. Vagyis $\mathcal{E}$ minden olyan pontja előáll a két egyenes metszéspontjaként, melynek első koordinátája 1-nél kisebb.

Tehát a keresett mértani hely az $\mathcal{E}$ ellipszis, kivéve a B pontot.

Strenner Balázs (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Több megoldó úgy értelmezte a feladatot, hogy a C pont is változhat. Mivel a feladat szövegéből nem derült ki egyértelműen, hogy C rögzített pont, ezért ők is megkapták a teljes pontszámot, ha helyesen adták meg az ennek a feltételnek eleget tevő mértani helyet, ami az AB átmérőjű nyílt körlap és az A pont. Ez megoldásunkból egyszerűen következik: Ha C változik, akkor a mértani helyként kapott $\mathcal{E}$ ellipszis kistengelye változik. Mint láttuk, ennek hossza $\sqrt{\dfrac{c}{c-1}}$, ami minden 0 és 1 közti értéket felvehet, ha c tetszőleges negatív szám lehet. Ekkor tehát a mértani hely az összes ilyen ellipszisek uniója (kivéve B-t).