

1. ábra

I. megoldás. Toljuk el az ABD háromszöget az \overrightarrow{AC} vektorral. (1. ábra) Így az $A'B'D'$ háromszöget kapjuk, ahol $A' = C$. Az ábra betűzése szerint azt kell igazolnunk, hogy

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \geq (e + f)^2.$$

A $DBB'D'$ paralelogramma oldalai az eredeti négyszög átlói, e és f . Két pontot összekötő töröttvonal hossza legalább akkora, mint a két pontot összekötő szakaszé, ezért $a + c \geq B'D$ és $b + d \geq BD'$. A kapott egyenlőségek négyzetét összeadva

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \geq DB'^2 + BD'^2.$$

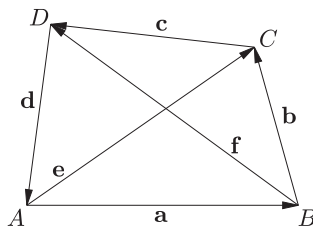
Ismeretes, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével. A $DBB'D'$ paralelogrammában tehát

$$DB'^2 + BD'^2 = 2e^2 + 2f^2,$$

és így $(a + c)^2 + (b + d)^2 \geq 2(e^2 + f^2) = (e - f)^2 + (e + f)^2$. Mivel $(e - f)^2 \geq 0$, innen a bizonyítandó állítást kapjuk.

A bizonyításból kiderül, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha a DCB' és a $D'CB$ háromszögek elfajulnak, az $ABCD$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, másrészt $(e - f)^2 = 0$, a négyszög átlói egyenlők. Mindkét feltétel pedig akkor és csak akkor teljesül, ha az $ABCD$ négyszög téglalap.

Jelítai Kálmán (Budapest, Szent István Gimn., 12. évf.) és
Fehér Gábor (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 11. évf.) dolgozata nyomán



2. ábra

II. megoldás. Irányítsuk a konvex négyszög oldalait és átlóit a 2. ábra szerint. Így $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, továbbá $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{e}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{f}$, $\mathbf{c} + \mathbf{d} = -\mathbf{e}$, $\mathbf{d} + \mathbf{a} = -\mathbf{f}$. Emeljük négyzetre az utóbbi négy egyenlőséget, majd adjuk össze az így adódó összefüggéseket. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{cd} + \mathbf{da}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon a skalárszorzatok összege szorzattá alakítható: $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{cd} + \mathbf{da} = (\mathbf{a} + \mathbf{c})(\mathbf{b} + \mathbf{d})$. Ezt felhasználva

$$(1) \quad \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 + (\mathbf{a} + \mathbf{c})(\mathbf{b} + \mathbf{d}).$$

Az oldalak irányítása szerint $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Ha az (1) összefüggésben $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ helyére $-(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ -t, illetve $(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ helyére $-(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ -t írunk, akkor a műveletek elvégzése után

$$(2) \quad \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 - (\mathbf{b} + \mathbf{d})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bd},$$

továbbá

$$(3) \quad \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 - (\mathbf{a} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 - 2\mathbf{ac}$$

adódik.

Adjuk össze a (2) és (3) egyenlőségeket:

$$2(\mathbf{e}^2 + \mathbf{f}^2) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 - 2\mathbf{ac} - 2\mathbf{bd}.$$

Egy vektor négyzete a vektor hosszának a négyzete. Így a fenti összefüggés átírható:

$$(4) \quad 2(e^2 + f^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\mathbf{ac} - 2\mathbf{bd}.$$

A jobb oldalon $a^2 + c^2 - 2\mathbf{ac} = a^2 + c^2 - 2ac \cos \varphi$, ahol φ az \mathbf{a} és \mathbf{c} vektorok hajlásszöge. Mivel a és c nem negatív, továbbá $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$, azért

$$a^2 + c^2 - 2ac \cos \varphi \leq a^2 + c^2 + 2ac = (a + c)^2$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha $\cos \varphi = -1$, $\varphi = 180^\circ$, az \mathbf{a} és \mathbf{c} vektorok párhuzamosak.

Ugyanígy kapjuk, hogy $b^2 + d^2 - 2\mathbf{bd} \leq (b + d)^2$. Az első megoldásban látottak szerint $(e + f)^2 \leq 2(e^2 + f^2)$. Így (4)-ből a talált egyenlőségek felhasználásával következik, hogy $(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Pálinkás Csaba (Szolnok, Verseggy Ferenc Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések 1. A második megoldásból is nyomban adódik, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha az $ABCD$ négyszög téglalap. Vegyük észre továbbá, hogy egyik esetben sem használtuk ki, hogy a négyszög konvex: a feladat állítása tetszőleges négyszögre igaz.

2. Több dolgozat két ismertebb tételre vezette vissza a feladatot. Az első megoldásban is felhasznált paralelogrammatétel általánosítása azt mondja ki, hogy az $ABCD$ négyszögben az oldalak négyzetösszege nagyobb vagy egyenlő, mint az átlók négyzetösszege:

$$(5) \quad AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq AC^2 + BD^2$$

és paralelogrammában van egyenlőség. (*Geometriai feladatok gyűjteménye, I. 1678.* feladat.)

A *Ptolemaiosz-tétel* általánosítása szerint az $ABCD$ négyszögben

$$(6) \quad AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

és húrnégyszögben van egyenlőség. (A bizonyítás megtalálható Reiman István: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994* c. művének 542. oldalán.)

A bizonyítandó állítás most már egyszerűen adódik, ha (6) kétszeresét hozzáadjuk (5)-höz és az egyenlőség feltétele is leolvasható.