Legyen a folyó szélessége D, a víz sebessége v, és jelölje u azt a sebességet, amivel Joe futni, illetve evezni tud. Tegyük fel, hogy Joe először átevez a folyón, majd a partot érés helyétől a part mentén gyalog megy az aranyröghöz. (Természetesen az evezés és a gyaloglás sorrendje felcserélhető.) Ha csónakja vízhez viszonyított sebessége a vízével $\pi/2+\alpha$ szöget zár be, a folyóra merőlegesen $u\cos\alpha$ sebességgel halad, miközben $v-u\sin\alpha$ sebességgel csurog lefelé (*1. ábra*). Ennek megfelelően

$$t_1=\frac{D}{u\cos\alpha}$$

idő alatt ér át a túlsó partra, és

$$s=(v-u\sin\alpha)t_1$$

távolsággal az aranyrög alatt ér partot. Ezt az utat

$$t_2=\frac{s}{u}=D\,\frac{v-u\sin\alpha}{u^2\cos\alpha}$$

idő alatt teszi meg. Így az aranyrög elérése az α szög függvényében összesen

$$t(\alpha)=t_1+t_2=\frac{D}{u}\cdot\frac{v/u+1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

időt vesz igénybe. Ha α-t egy kicsi $\Delta\alpha$ értékkel megváltoztatjuk, t is megváltozik, értéke

$$t(\alpha+\Delta\alpha)=\frac{D}{u}\cdot\frac{v/u+1-\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{D}{u}\cdot\frac{(v/u+1)\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha$$

lesz. A levezetés során kihasználtuk, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ esetén

$$\sin\Delta\alpha\approx\Delta\alpha\qquad\text{és}\qquad\cos\Delta\alpha\approx 1,$$

így

$$\sin(\alpha+\Delta\alpha)\approx\sin\alpha+\Delta\alpha\cos\alpha,$$

illetve

$$\cos(\alpha+\Delta\alpha)\approx\cos\alpha-\Delta\alpha\sin\alpha,$$

továbbá azt, hogy

$$(1-\Delta\alpha\,\mathrm{tg}\alpha)^{-1}\approx(1+\Delta\alpha\,\mathrm{tg}\alpha)\,,$$

a $(\Delta\alpha)^2$ nagyságrendű tagokat pedig elhanyagoltuk. (Ezek a közelítések annál jobbak, minél kisebb $\Delta\alpha$.) Ha $t(\alpha)$ minimális, akkor t értéke sem pozitív, sem negatív $\Delta\alpha$ mellett nem csökkenhet, következésképpen $\Delta\alpha$ együtthatója nulla kell legyen:

$$\frac{(v/u+1)\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=0,\qquad\text{innen}\qquad\sin\alpha=\frac{u}{v+u}.$$

Eddigi számításunk csak akkor helyes, ha $v-u\sin\alpha\ge 0$. Ellenkező esetben s negatív lenne, azaz Joe az aranyrög „fölött” érne partot. Ilyenkor $t_2=-s/u$-val kellene számolnunk, de ezt az esetet nem érdemes végigszámolni, mert nyilván időveszteség, ha Joe „túlevez” az aranyrögön. Ekkor (tehát ha a $v\le u\sin\alpha$) Joenak úgy érdemes eveznie, hogy az eredő sebessége merőleges legyen a folyó partvonalára. A két esetet elválasztó határesetben

$$v-u\frac{u}{v+u}=0,\qquad\text{azaz}\qquad\frac{v}{u}=\frac{u}{v+u},$$

ahonnan

$$\frac{v}{u}=\frac{\sqrt5-1}{2}\approx 0{,}618.$$

Ez éppen az *aranymetszés* nevezetes arányszáma.

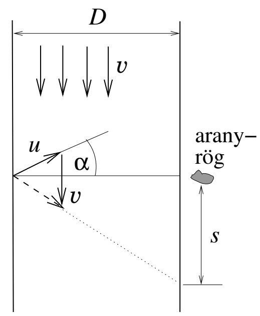
A fenti eredményt a differenciálszámítás formális szabályainak alkalmazásával vagy az

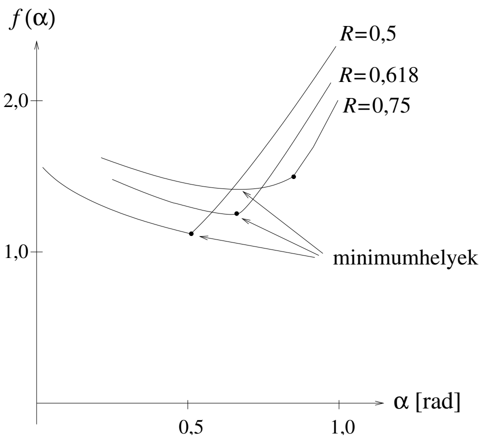
$$f(\alpha)=\frac{|R-\sin\alpha|+1}{\cos\alpha}$$

függvény ($R=v/u$) grafikus vizsgálatával is megkaphatjuk (*2. ábra*).

W. F.

Megjegyzés. A megoldás során természetesnek vettük, hogy Joe a vízben egyenes vonalban evez, és a szárazföldön is egyenes vonalban gyalogol. Ez utóbbi – a legrövidebb idejű mozgásnál – nyilván igaz (hiszen „két pont között legrövidebb út az egyenes”), az előbbi célszerűségét pedig a vízhez rögzített koordináta-rendszerben lehet a legkönnyebben belátni.


D
v
u
α
v
arany–
rög
s


f (α)
2,0
1,0
R=0,5
R=0,618
R=0,75
minimumhelyek
α [rad]
0,5
1,0