

**I. megoldás.** A ládát toló  $F$  erő iránya az ábrának megfelelően  $\beta$  szöget zár be a lejtővel. Jelölje azt az erőt amivel a láda a lejtőt nyomja  $N$ , a súrlódási erőt  $S$ , a súrlódási határszöveget pedig  $\alpha_0$  (ahol  $\operatorname{tg} \alpha_0 = \mu$ )! Az erők egyensúlya miatt

$$F \cos \beta = mg \sin \alpha + S, N = mg \cos \alpha - F \sin \beta, S = \mu N.$$

Innen

$$F = mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} = mg \frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\cos(\beta - \alpha_0)}.$$

Ez nyilván akkor a legkisebb, ha  $\beta = \alpha_0$ . Ekkor

$$F = mg \sin(\alpha + \alpha_0) = mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Megoldásunk akkor helyes, ha  $F$  még nem függőleges, és a ládát nem emeljük el a lejtőtől ( $N$  pozitív). Érdekes módon a két feltétel konkrétan megfogalmazva ugyanarra az egyenlőtlenségre vezet:  $\cos(\alpha + \alpha_0) > 0$ . Ha ez nem teljesül, a legkönnyebb a ládát a lejtő elhagyásával egyszerűen felemelni.

**II. megoldás.** A test csúszik, tehát a talaj  $\mathbf{N}$  nyomóerejének és az  $\mathbf{S}$  súrlódási erőnek az eredője rajta fekszik a súrlódási határszög által kijelölt (vagyis a test pillanatnyi helyzetét megadó  $T$  ponton átmenő, a lejtő normálisával „balra”  $\alpha_0$  szöveget bezáró)  $e$  egyenesen. Ennek az erőnek és a kérdéses  $\mathbf{F}$  erőnek vektori összege  $-\mathbf{mg}$ -t kell adjon, hiszen  $\mathbf{N} + \mathbf{S} + \mathbf{F} + \mathbf{mg} = 0$ .

Az  $\mathbf{F}$  erőt úgy szerkeszthetjük meg, hogy a  $-\mathbf{mg}$  vektor  $P$  végpontját összekötjük az  $e$  egyenes valamely  $Q$  pontjával. Az erő  $F$  nagysága akkor a legkisebb, ha  $PQ$  minimális, vagyis amikor  $PQ$  merőleges  $TQ$ -ra. Az ábráról leolvasható, hogy  $PQ$  optimális esetben a vízszintessel  $\alpha + \alpha_0$  szöveget zár be, a minimális nagyságú erő és a lejtő síkjának szöge tehát  $\beta = \alpha_0$ . A minimális erő nagysága

$$F = mg \sin(\alpha + \alpha_0) = mg(\sin \alpha \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha) = mg \cos \alpha_0 (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_0) = mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Mindez csak akkor igaz, ha  $Q$  a  $T$  ponttól „balra” helyezkedik el, vagyis amíg  $\alpha + \alpha_0 < \pi/2$ . Ellenkező esetben  $F$  legkisebb értéke  $mg$ , iránya pedig függőlegesen felfelé mutat.

