Mivel $m_1 = m_3$, a rendszer az *1. ábrán* látható koordináta-rendszer y tengelyére nézve szimmetrikus mozgást végez. A korongokra vízszintes irányú külső erő nem hat (a függőleges irányú erők eredője pedig nulla), így a három test összimpulzusa nem változhat meg. Kezdetben az y irányú impulzus $m_2 v_0$ volt, a középső korong megállásának pillanatában pedig $(m_1 + m_3)v_y$. A lendületmegmaradás törvénye szerint

$$v_y = \frac{m_2}{m_1 + m_3} v_0 = \frac{m_2}{2m_1} v_0 = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

1. ábra

A légpárnás asztalon a súrlódás elhanyagolható, az ütközések pedig rugalmasak, a rendszer E mechanikai energiája tehát időben állandó. Kezdetben

$$E=\frac{1}{2}m_2v_0^2,$$

a középső korong megállásának pillanatában pedig

$$E=\frac{1}{2}(m_1+m_3)(v_x^2+v_y^2).$$

Az energiamegmaradás törvényének értelmében

$$\frac{1}{2}(m_1+m_3)(v_x^2+v_y^2)=\frac{1}{2}m_2v_0^2,$$

ahonnan v_y korábban kiszámított értékének felhasználásával

$$v_x^2=\frac{m_2}{2m_1}\left(1-\frac{m_2}{2m_1}\right)v_0^2,$$

$$v_x=\pm\sqrt{\frac{m_2}{2m_1}\left(1-\frac{m_2}{2m_1}\right)}v_0$$

adódik. Látható, hogy a középső korong csak $m_2\le 2m_1$ esetén állhat meg (a feladat számadataival ez valóban teljesül). A v_x sebességkomponens kétféle előjele arra utal, hogy az m_2 tömegű korong megállhat olyan helyzetben is, amelynél a szélső korongok közelednek egymáshoz, de úgy is, hogy a másik két korong távolodik egymástól. Az első rugalmas ütközés után nyilván a távolodásnak megfelelő pozitív előjelű megoldás érvényes.

A jobb szélső korong sebessége tehát a középső korong első megállásakor a

$$v_x=\sqrt{\frac{m_2}{2m_1}\left(1-\frac{m_2}{2m_1}\right)}v_0=\sqrt{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 2{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\quad \text{illetve}\quad v_y=4{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

komponensekkel adható meg. A szélső korongok sebességének nagysága

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{24}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 4{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a sebességvektor irányának az x tengellyel bezárt szöge pedig

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x}\approx 54{,}7^\circ.$$

A középső korong megállásának pillanatában a szélső korongok sebessége merőleges kell legyen a nekik megfelelő fonálra (hiszen a fonál irányú relatív sebességük a fonalak nyújthatatlansága miatt nulla), így a fonalak egymással $2\alpha\approx 109^\circ$-os szöget zárnak be.

Balogh László (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) és
Rakyta Péter (Révkomárom, Selye J. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A feladat numerikus adatai (a közölt számjegyek száma alapján) semmiképpen nem tekinthetők nagyon pontos (mondjuk százalékosnál pontosabb) értékeknek. Emiatt nincs értelme a belőlük kiszámított mennyiségeket pl. $v=4{,}898\,97$ m/s, illetve $2\alpha=109{,}471^\circ$ módon, vagy esetleg még ennél is „értékes” jegyre megadni!

2. A megoldás során feltételeztük, hogy a fonalak mindvégig feszesek. Be lehet látni, hogy ez valóban így van, a fonalat feszítő erők sehol nem válnak nullává, hanem egy bizonyos $F_{\min}$ érték alá sosem csökkennek.

2. ábra

3. Tanulságos a mozgás leírása a (X és Y tengelyekkel megadott) tömegközépponti koordináta-rendszerben. A rendszer S tömegközéppontja

$$v_{TKP} = \frac{m_2}{2m_1 + m_2} v_0$$

sebességgel mozog az asztalhoz képest a negatív Y tengely irányában. Az S ponthoz rögzített rendszerből nézve a szélső korongok az indításkor

$$V_Y^{(1,3)} = \frac{m_2}{m_2 + 2m_1} v_0$$

sebességgel mozognak Y irányban, a középső korong sebessége pedig

$$V_Y^{(2)} = v_{TKP} - v_0 = -\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} v_0$$

az Y tengely irányában, tehát ténylegesen $-Y$ irányú (*2. ábra*). A három korong összenergiája a tömegközépponti rendszerben

$$E_{TKP} = \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{2m_1}{2m_1 + m_2} v_0 \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{2m_1 + m_2} v_0 \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2m_1 m_2}{2m_1 + m_2} v_0^2.$$

Ez az érték kisebb, mint a légpárnás asztalhoz rögzített koordináta-rendszerben mérhető E összenergia.

A tömegközéppont a mozgás során mindvégig az origóban marad. Ha a középső korong az $-Y$ tengely mentén d távolságnyit elmozdul, akkor a másik két test Y irányú elmozdulása $Y = \frac{m_2}{2m_1} \cdot d$. Másrészt viszont a középső és a szélső korongok távolsága mindig L, fennáll tehát

$$X^2 + (Y + d)^2 = L^2, \quad \text{azaz} \quad X^2 + Y^2 \left(1 + \frac{2m_1}{m_2} \right)^2 = L^2.$$

Ez az egyenlet

$$\left(\frac{X}{a} \right)^2 + \left(\frac{Y}{b} \right)^2 = 1$$

alakú, vagyis egy

$$a = L \quad \text{és} \quad b = m_2 L / (m_2 + 2m_1)$$

féltengelyekkel rendelkező ellipszis egyenlete (*3. ábra*). A két szélső korong az ellipszis mentén mozog, míg a középső az Y tengely mentén rezeg $2m_1 L / (m_2 + 2m_1)$ amplitúdóval.

3. ábra

A két szélső test (az ütközéseknek megfelelő $X = 0$ koordinátájú pontok kis környezetének kivételével) befutja a teljes ellipszist. Sehol sem állhatnak meg, hiszen ha ezt tennék, akkor a középső testnek is meg kellene állnia, és ilyenkor nem lehetne a rendszer összenergiája a kiszámított $E_{TKP} \neq 0$ érték.

(G. P.)