**3.A feladat.** *Neutrínótömeg és neutronbomlás*

*a*) Jelöljük az egyes részecskék (relativisztikus) energiáját $E$-vel, impulzusvektorát pedig $\mathbf{q}$-val, és mindegyiket lássuk el a részecske típusára utaló (p, n, e, illetve az antineutrínót $\nu$) indexszel! Használjunk olyan egységrendszert, amelyben a fénysebesség egységnyi (ebben a tömeget, az energiát és az impulzust egyaránt MeV-ban mérhetjük.)

A bomlási folyamat során az energiák összege és az impulzusok összege változatlan marad (ezek megmaradó mennyiségek):

(1) $$E_\mathrm{n} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{e} + E_\nu,$$

(2) $$\mathbf{q}_\mathrm{n} = \mathbf{q}_\mathrm{p} + \mathbf{q}_\mathrm{e} + \mathbf{q}_\nu.$$

Az egyes részecskék energiája és impulzusa összefügg egymással:

(3) $$E_i^2 - \mathbf{q}_i^2 = m_i^2 \qquad (i = \mathrm{n,p,e},\nu),$$

amint az a megfelelő $\mathbf{v}_i$ sebességgel felírt

$$E_i = \frac{m_i}{\sqrt{1-v_i^2}}, \qquad \mathbf{q}_i = \frac{m_i\mathbf{v}_i}{\sqrt{1-v_i^2}}$$

formulákból könnyen leolvasható.

Képzeljük el, hogy a vizsgálandó $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \nu$ bomlási folyamat két lépésben megy végbe: a neutron először elbomlik egy elektronra és egy $x$ jelű részecskére, majd az $x$ részecske elbomlik protonra és antineutrínóra:

$$\mathrm{n} \to \mathrm{e} + x \qquad \text{majd} \qquad x \to \mathrm{p} + \nu.$$

(A megmaradási törvények szempontjából lényegtelen, hogy a folyamat ténylegesen így zajlik-e le, vagy pedig egyszerre, egyetlen pillanatban történik a neutron bomlása; a feladatban szereplő kérdésre azonban könnyebb választ adni, ha lépcsőzetesnek gondoljuk a bomlást.)

Írjuk fel a bomlás első részére a megmaradási törvényeket abban a koordináta-rendszerben, amelyben a neutron áll (azaz ahol $\mathbf{q}_\mathrm{n} = 0$ és $E_\mathrm{n} = m_\mathrm{n}$). Az impulzusmegmaradás törvénye miatt az elektron és az $x$ részecske impulzusa ugyanakkora nagyságú (de ellentétes irányú), az energiamegmaradást tehát így fogalmazhatjuk meg:

(4) $$m_\mathrm{n} = E_\mathrm{e} + E_x,$$

ahol

(6) $$E_\mathrm{e}^2 - m_\mathrm{e}^2 \ (= q_\mathrm{e}^2 = q_x^2) \ = E_x^2 - m_x^2.$$

Fejezzük ki (5)-ből $E_x$-t és helyettesítsük be (6)-ba, majd a kapott összefüggésből határozzuk meg az elektron energiáját. Az eredmény:

(7) $$E_\mathrm{e}^2 = \frac{m_\mathrm{n}^2 + m_\mathrm{e}^2 - m_x^2}{2m_\mathrm{n}^2}.$$

Látható, hogy a bomlás során keletkező elektronnak annál nagyobb lesz az energiája, minél kisebb a bomlás másik termékének (az $x$ részecskének) a tömege.

Mekkora lehet $m_x$ legkisebb értéke? Erre a kérdésre legkönnyebben az $x$ részecske nyugalmi rendszerében kaphatjuk meg a választ. Mivel $x$ egy protonra és egy antineutrínóra bomlik, fennáll, hogy

(8) $$m_x = E'_\mathrm{p} + E'_\nu \geq m_\mathrm{p} + m_\nu = m_x^\mathrm{min}.$$

(A vessző arra utal, hogy ezeket a mennyiségeket nem a laboratóriumi koordináta-rendszerben számítottuk ki, hanem az $x$ részecske nyugalmi rendszerében.

A (8) egyenlőtlenség akkor válik egyenlőséggé, amikor a proton és az antineutrínó egymáshoz képest nem mozog, tehát a laboratóriumi rendszerből nézve a sebességük megegyezik. Ebben a határesetben (7) alapján

$$E_\mathrm{e}^\mathrm{max} = \frac{m_\mathrm{n}^2 + m_\mathrm{e}^2 - \left(m_x^\mathrm{min}\right)^2}{2m_\mathrm{n}^2} = \frac{m_\mathrm{n}^2 + m_\mathrm{e}^2 - \left(m_\mathrm{p} + m_\nu\right)^2}{2m_\mathrm{n}^2},$$

amelynek numerikus értéke 1,292 569 MeV ≈ 1,29 MeV.

Az antineutrínó (és vele egyezően a proton) sebessége az $x$ részecske (labor rendszerbeli) sebességével egyezik meg, ami így adható meg:

$$v_m = \frac{\sqrt{(m_\mathrm{n} + m_\mathrm{e} + m_x)(m_\mathrm{n} + m_\mathrm{e} + m_x)(m_\mathrm{n} + m_\mathrm{e} - m_x)(m_\mathrm{n} - m_\mathrm{e} + m_x)}}{m_\mathrm{n}^2 - m_\mathrm{e}^2 - m_\mathrm{x}^2},$$

ahol most is $m_x = m_\mathrm{p} + m_\nu$. Numerikusan (fénysebességnyi egységekben mérve) $v_m = 0{,}001\,265\,38 \approx 0{,}001\,27$.

**3.B feladat.** *Lebegtetés fénnyel*

A függőlegesen felfelé haladó fénysugarak (fotonok) – amikor az üvegen áthaladnak – irányt változtatnak, és emiatt a lendületük (impulzusuk) függőleges komponense lecsökken. Az egységnyi idő alatt „leadott impulzus" a félgömbre ható fény-nyomóerővel egyenlő, és ha ez az erő éppen egyenlő az üveg súlyával, akkor a test lebeghet. Kövessük végig mindezt számítással is!

*b*) Tekintsük a lézerfény-nyaláb azon részét, amelynek az optikai tengelytől mért távolsága $x$ és $x + \Delta x$ közé esik (ahol $\Delta x \ll x$). Ebbe a tartományba a lézer teljes $P$ teljesítményének csak egy kis hányada, a területek arányának megfelelően

$$\Delta P = \frac{2\pi x\,\Delta x}{\delta^2 \pi}\,P$$

érkezik, vagyis a kérdéses tartományba egységnyi idő alatt

$$\Delta n = \frac{\Delta P}{hf} = \frac{2xP}{\delta^2 hf}\Delta x$$

számú (egyenként $hf$ energiával rendelkező) foton érkezik. (Itt $f$ a lézerfény frekvenciája, $h$ pedig a Planck-állandó.)

A fénysugarak irányváltozása szempontjából célszerű az üveg félgömb középső (az optikai tengelyhez közeli) tartományát gondolatban két részre bontani: egy planparalel lemezre (amely a rá merőlegesen eső fénysugarakat nem töri meg) és egy síkdomború vékony lencsére, amelynek $f_0 = \dfrac{R}{n-1}$ a fókusztávolsága. Ez utóbbi $\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{f_0} = \dfrac{x}{R}(n-1)$ szöggel téríti el a fotonokat, azok kezdeti $I = \dfrac{hf}{c}$ impulzusa tehát

$$\Delta I = \frac{hf}{c}(1-\cos\theta) = \frac{hf}{c}2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx \frac{hf}{c}\frac{\theta^2}{2} \approx \frac{hf}{c}\frac{x^2(n-1)^2}{2R^2}$$

értékkel lecsökken ($c$ a fénysebesség vákuumban). A teljes impulzusváltozás az egyes fotonok impulzusváltozásának összege:

$$I = \sum \Delta n\,\Delta I = \sum \frac{2xP}{\delta^2 hf}\Delta x \cdot \frac{hf}{c}\frac{x^2(n-1)^2}{2R^2} = \frac{P(n-1)^2}{\delta^2 c R^2}\sum x^3 \Delta x.$$

A legutolsó kifejezésben szereplő összeg a felosztás finomításával ($\Delta x$ egyre kisebbé tételével) egy integrálba megy át:

$$\sum x^3 \Delta x \to \int_0^\delta x^3\,dx = \frac{\delta^4}{4},$$

így az egyensúly feltétele $I = \dfrac{P(n-1)^2\delta^2}{4cR^2} = mg$, ahonnan a kérdéses lézerteljesítmény:

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$