2. feladat. *Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel*

a) A rúd bal oldali részének deformációja (relatív hosszváltozása)

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{-v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{-v}{u},$$

a nyomás tehát a bal oldali felületnél

$$p = -YS = Y\frac{v}{u} = \varrho uv.$$

(Kihasználtuk, hogy a lökéshullám terjedési sebessége $u = \sqrt{Y/\varrho}$.)

b) Ha a rúd (helyről helyre és pillanatról pillanatra változó) elmozdulása

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

akkor a sebesség (deriválással, vagy a forgómozgással való analógia kihasználásával)

$$v(x,t) = -ku\xi_0 \cos k(x - ut),$$

a deformáció (az előző alkérdés eredményének felhasználásával, vagy közvetlenül az elmozdulásfüggvény x szerinti deriválásával)

$$S(x,t) = \frac{-v(x,t)}{u} = k\xi_0 \cos k(x - ut),$$

a nyomás pedig

$$p(x,t) = \varrho uv(x,t) = -k\varrho u^2\xi_0 \cos k(x - ut) = -YS(x,t).$$

c) A hasáb közepe nem tud elmozdulni, így $g(b/2) \equiv 0$, emiatt $B_2 = 0$. Másrészt $g(x)$ maximális értéke 1, ebből $B_1 = \pm 1$ következik.

d) A hasáb két végénél a nyomás (és ezzel együtt a deformáció is) minden pillanatban nulla. Ez akkor teljesül, ha a hasáb szélei (a nyitott végű csövekben kialakuló hanghullámokhoz hasonlóan) az állóhullám duzzadóhelyei. Eszerint a legnagyobb lehetséges hullámhossz a hasáb b hosszának kétszerese, a megfelelő frekvencia pedig

$$f_1 = \frac{u}{2b} = 273\ \text{kHz}.$$

A második legkisebb frekvencia (ami annak felel meg, hogy a hasáb hossza a félhullámhossz háromszorosa):

$$f_2 = 3f_1 = \frac{3u}{2b} = 819\ \text{kHz}.$$

e) A piezoelektromos hatást leíró egyik egyenletből kifejezhetjük a mechanikai feszültséget:

$$T = \big(S - d_pE\big)Y, \tag{5}$$

majd ezt a másik egyenletbe helyettesítve az elektromos töltéssűrűségre

$$\sigma = d_pY \cdot S + \left(\varepsilon_T - d_p^2Y\right)E \tag{6}$$

adódik. Az elektromos térerősséget a megadott elektromos feszültségből számíthatjuk:

$$E(x,t) = \frac{U(t)}{h} = \frac{U_m \cos\omega t}{h}. \tag{7}$$

Mivel E időfüggése $\cos\omega t$ alakú, feltehetjük, hogy a hasáb S deformációja is így változik időben, vagyis

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin k\left(x - \frac{b}{2}\right) \cdot \cos\omega t, \tag{8}$$

$$S(x,t) = k\xi_m \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) \cdot \cos\omega t. \tag{9}$$

Helyettesítsük (7)-et és (9)-et az (5) egyenletbe, és használjuk ki, hogy a hasáb széleinél (pl. $x = 0$-nál) a mechanikai feszültség nulla. Innen a rezgés amplitúdójára

$$\xi_m = \frac{d_pU_m}{hk\cos(kb/2)}$$

adódik, (6)-ból pedig leolvashatjuk, hogy a kérdéses együtthatók:

$$D_1 = \frac{d_p^2\,Y}{\cos\left(kb/2\right)} \qquad \text{és} \qquad D_2 = \varepsilon_T - d_p^2 Y.$$

f) Az előző pontban kiszámított felületi töltéssűrűséget x szerint integrálva megkapjuk a hasáb egyik kontaktusán levő teljes töltést:

$$Q(t) = w\int_0^b \sigma(x,t)\,dx = C_0\left[1+\alpha^2\left(\frac{2}{kb}\,\mathrm{tg}\,\frac{kb}{2}-1\right)\right]U(t),$$

ahol $C_0 = \varepsilon_T bw/h$ a hasáb (mint w széles, b hosszú és h vastagságú síkkondenzátor) alacsony frekvenciákon ($\omega = ku \approx 0$) érvényes kapacitása, és

$$\alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = 9{,}82\cdot 10^{-3},$$

az ún. *elektromechanikus csatolási állandó* négyzete.