1. feladat. *Inga, melynek felső végét is egy súly húzhatja*

a) Mivel a fonal hossza $L = s + R\theta$ állandó, a megfelelő változási sebességek közötti kapcsolat: $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$.

b) A Q pont R sugarú körpályán mozog $\dot{\theta}$ szögsebességgel, a sebessége O-hoz viszonyítva $\mathbf{v}_O = R\dot{\theta}\hat{\mathbf{t}}$, ami $-\dot{s}\hat{\mathbf{t}}$ alakba is írható.

c) A P pont Q-hoz viszonyított sebessége

$$\mathbf{v}_Q = -s\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} + \dot{s}\hat{\mathbf{t}}.$$

Az első tag az s sugarú, $\dot{\theta}$ szögsebességű körmozgás kerületi sebessége, a második tag pedig a QP fonálhossz változását veszi figyelembe.

d) A P pont O-hoz viszonyított (tehát az inerciarendszerben mérhető) sebessége

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_Q = -s\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}.$$

Ez tisztán érintő irányú, összhangban azzal a ténnyel, hogy az O pontbeli fonaldarab pillanatnyi sebessége az inerciarendszerben mérve nulla. (Maga az O pont nem egy bizonyos anyagi pontot, hanem a fonal pillanatról pillanatra változó darabkáját jelöli. Ehhez a mozgó ponthoz képest a P pont fonál irányú sebességgel is rendelkezik, ez a fiktív mozgás azonban az inerciarendszerből szemlélve már eltűnik.)

e) A P pontban levő részecske gyorsulásának $\hat{\mathbf{t}}$ irányú (tehát fonál irányú) komponense a centripetális gyorsulás képletének megfelelően

$$-s\dot{\theta}^2. \tag{1}$$

f) A P pontban levő test gravitációs helyzeti energiája

$$U(\theta) = -mg\big[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta\big].$$

(A helyzeti energiát a test indítási magasságában választottuk nullának.)

g) A pálya legalacsonyabb pontja $\theta = \pi/2$-nek felel meg (itt válik a sebesség függőleges komponense nullává). Ebben a pontban a test helyzeti energiája minimális:

$$U_{\min} = U(\pi/2) = -mg\big[R + L - (R\pi/2)\big].$$

Alkalmazva a mechanikai energiamegmaradás tételét:

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + U_{\min},$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2g\big[R + L - (R\pi/2)\big]}.$$

h) A test mozgási energiája egy tetszőleges θ szöggel jellemzett helyzetben (az energiamegmaradás tétele szerint)

$$\frac{1}{2}mv^2 = -U(\theta) = mg\big[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta\big],$$

ahonnan

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = 2g\big[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta\big]. \tag{2}$$

Jelöljük K-val a fonalat feszítő erőt. A fonál irányú mozgásegyenlet (1) felhasználásával

$$m(-s\dot{\theta}^2) = -K + mg\sin\theta, \tag{3}$$

ahonnan (2) segítségével kifejezhető a fonálerő:

$$K = m(s\dot{\theta}^2 + g\sin\theta) = \frac{mg}{s}\big[2R(1-\cos\theta) + 3s\sin\theta\big] =$$
$$= \frac{mgR\sin\theta}{s}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\left(\theta - \frac{L}{R}\right)\right].$$

A fonal meglazulásának ($K = 0$-nak) megfelelő θ_0 szögre fennáll

$$\frac{3}{2}\left(\theta_0 - \frac{L}{R}\right) = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2},$$

amit L/R megadott értékének behelyettesítésével

$$\theta_0 - \frac{9\pi}{8} = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{16} \tag{4}$$

alakban is felírhatunk. Ennek az egyenletnek ránézésre megadható egy gyöke: $\theta_0 = \dfrac{9\pi}{8}$. Ha valaki nem veszi észre ezt a megoldást, numerikusan (zsebszámológép segítségével) is megkaphatja a (4) trigonometrikus egyenletet gyökét: $\theta_0 \approx 3{,}53$ radián. Ellenőrizhető, hogy a $0 < \theta < \theta_0$ tartományban $K > 0$, tehát a fonal korábban nem lazul meg.

A fonal legrövidebb, de még nem laza helyzetében

$$s = s_{\min} = L - R\theta_0 = \frac{2R}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} \approx 3{,}352\ R,$$

a test sebességének nagysága pedig ekkor (4) szerint

$$v_0 = \sqrt{-gs_{\min}\sin\theta_0} = \sqrt{\frac{2gR}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16}\ \sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{4gR}{3}}\ \cos\frac{\pi}{16} \approx 1{,}133\ \sqrt{gR}.$$

i) A mozgás további részében a test v_0 kezdősebességű ferde hajítást végez. A pálya legmagasabb H pontjában a sebessége

$$v_H = v_0\sin(\theta_0 - \pi) = \sqrt{\frac{4gR}{3}}\ \cos\frac{\pi}{16}\ \sin\frac{\pi}{8} = 0{,}433\sqrt{gR}$$

lesz, és a H pontig a vízszintes elmozdulása

$$d = \frac{v_0^2\sin 2(\theta_0 - \pi)}{2g} = \frac{\sqrt{v_0^2}}{2g}\sin\frac{9\pi}{4} = 0{,}453\,R.$$

Meg kell még vizsgálnunk, hogy a H pont elérése előtt nem ütközik-e neki a test a rúdnak. A $\theta = \theta_0$ helyzetnek megfelelő pontban a test koordinátái:

$$x_0 = R\cos\theta_0 - s_{\min}\sin\theta_0 = 0{,}358\,R,$$

$$y_0 = R\sin\theta_0 + s_{\min}\cos\theta_0 = -3{,}478\,R.$$

Látható, hogy $|y_0| > R + d$, így a test valóban eléri a pálya legmagasabb pontját.

j) A fonál súrlódásmentes csúszása során a m és a M tömegű testből álló rendszer teljes mechanikai energiája állandó marad. Ha a M tömegű test a mozgása során D-vel mélyebbre kerül, a helyzeti energiája MgD értékkel csökken, ugyanennyivel nő tehát a m tömegű test helyzeti és mozgási energiájának összege, és ez az összeg a fonál megtapadása után is változatlan marad.

Ha $L - D$ mellett R elhanyagolható, akkor a m tömegű test mozgását a továbbiakban rögzített pont körüli ingamozgásnak tekinthetjük. A fonál meglazulása szempontjából a legkényesebb helyzet a pálya legmagasabb pontja. Itt a test $L - D$ magasan van a rúd felett, sebességét pedig az

$$\frac{1}{2}mv^2 = MgD - mg(L - D)$$

egyenlet határozza meg. A fonál akkor nem lazul meg ebben a helyzetben, ha a gravitációs erő kisebb, mint a körmozgáshoz szükséges centripetális erő:

$$mg < \frac{mv^2}{L - D},$$

ami a munkatételből adódó sebesség kiküszöbölésével

$$mg < 2\frac{MgD - mg(L - D)}{L - D}$$

alakra hozható. Innen

$$\frac{D}{L} > \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}}.$$

Megjegyzések. 1. A m/M arány – a feladat egyszerűsítő feltevéseinek teljesülése esetén – egyértelműen meghatározza a D/L hányadost, igaz, ehhez egy bonyolult differenciálegyenletet kellene megoldanunk. A fenti egyenlőtlenség tehát tulajdonképpen csak a tömegek arányára jelent megszorítást.

2. A súrlódásmentes csúszás és nagyon nagy tapadási súrlódás feltételezése nyilván távol áll a realitástól. A leírt jelenséghez hasonló azonban mégis megvalósítható. Ha egy vékony, sima rúddal és jól csúszó, kellően hajlékony fonállal

(például horgászdamillal), és megfelelően választott nehezékekkel (pl. acélcsavarokkal) végezzük el a kísérletet, a mozgás első szakasza jó közelítéssel súrlódásmentesnek tekinthető. Igaz ugyan, hogy a fonal a megtapadása után vélhetően újra megcsúszik a hengeren, de a fonál fokozatos feltekeredése miatt (kötélsúrlódás) előbb-utóbb megállítja a csúszást, éppen úgy, mintha a tapadó súrlódás nagyon nagy lenne. Egyszerű eszközökkel kísérletileg is jól vizsgálható, hogy a kérdéses furcsa mozgás valóban létrejöhet, a m tömegű test többször is átfordulhat a rúd felett, és a mozgás akár a fonal teljes feltekeredéséig is tarthat.