

Megoldás. A soros RLC -körben folyó áramerősség

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

ami X_L -t változtatva akkor lesz maximális, amikor $X_L = X_C$. A legnagyobb áram $I_0 = U/R$, és a tekercsre eső feszültség ilyenkor $U_0 = X_L \cdot I_0$.

A tekercs feszültsége tetszőleges X_L esetén

$$U_{\text{tekercs}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cdot U = A \cdot U,$$

ami akkor maximális, amikor az A tört reciprokanak négyzete, vagyis az

$$\frac{1}{A^2} = \frac{R^2 + X_L^2 - 2X_L X_C + X_C^2}{X_L^2}$$

kifejezés minimális. Teljes négyzetté alakítással

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{X_L^2} (R^2 + X_C^2) - \frac{1}{X_L} 2X_C + 1 = (R^2 + X_C^2) \left(\frac{1}{X_L} - \frac{X_C}{R^2 + X_C^2} \right)^2 + \frac{R^2}{R^2 + X_C^2},$$

ahonnan jól látható, hogy $\frac{1}{A^2} \geq \frac{R^2}{R^2 + X_C^2}$, vagyis

$$U_{\text{tekercs}} \leq U_{\text{max}} = \frac{\sqrt{R^2 + X_C^2}}{R} \cdot U,$$

és az egyenlőség akkor áll fenn, amikor

$$X_L = \frac{R^2 + X_C^2}{X_C} = X_C + \frac{R^2}{X_C} > X_C.$$

(Az áramerősség maximuma $X_L = X_C$ esetben következett be, a tekercsre eső feszültség maximuma pedig ennél nagyobb X_L -nél, vagyis – a feladat szövegével összhangban – az áram maximumához tartozó L -nél nagyobb induktivitás esetén alakul ki.)

A kérdéses feszültségarány

$$\frac{U_{\text{max}}}{U_0} = \sqrt{1 + \frac{R^2}{X_C^2}},$$

ami $R = 2\sqrt{2}X_C$ esetén éppen 3.

()

Bóka Gergely (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 12. o.t.) és

Dudás László (Pécs, Széchenyi I. Gimn. és Szki., 12. o.t.)

dolgozata alapján

Megjegyzés. A tekercsre eső feszültség maximuma differenciálszámítás segítségével is megkapható. Az $U_{\text{tekercs}} = f(X_L)$ függvény deriváltja a maximum helyén nulla:

$$f'(X_L) = \frac{U}{[R^2 + (X_L - X_C)^2]^{3/2}} \cdot (R^2 + X_C^2 - X_L X_C) = 0,$$

ahonnan $X_L = \frac{R^2 + X_C^2}{X_C}$. A derivált fenti képletében szereplő tört pozitív, a kérdéses értéknél kisebb X_L -re a függvény növekszik, nagyobb X_L -nél csökken, az U_{tekercs} függvénynek tehát a vizsgált pontban valóban maximuma van.

()

Török Edwin (Temesvár, Bartók B. Líceum, 11. o.t.)