

Megoldás. Azt a kijelentést, hogy a legró kutya és a szánkó relatív sebessége u , kétféleképpen is érthetjük:

I. értelmezés: A kutya sebessége a szánkó *eredeti* sebességéhez képest u .

II. értelmezés: A kutya sebessége a szánkó *megváltozott* sebességéhez képest u .

Tekintsük először az I. értelmezést! Jelöljük a szánkó sebességét a kutya i -edik ugrása után v_i -vel; ekkor az n -edik leugrás után v_{2n-1} a szánkó sebessége, az n -edik felugrás után pedig v_{2n} . A lendületmegmaradás törvénye szerint a leugrásoknál

$$(1) \quad (M + m)v_{2n} = m(v_{2n} - u) + Mv_{2n+1},$$

a kutya felugrásainál pedig

$$(2) \quad mv + Mv_{2n+1} = (M + m)v_{2n+2}.$$

Ezekből a szánkó megváltozott sebességeit kifejezve:

$$(3) \quad v_{2n+2} = \alpha \cdot v_{2n} + \beta,$$

továbbá

$$(4) \quad v_{2n+1} = v_{2n} + \gamma,$$

ahol

$$(5) \quad \alpha = \frac{M}{m + M}, \quad \beta = \frac{m}{m + M}(u + v), \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{m}{M}u.$$

A (3) rekurziós képletből és a $v_0 = 0$ kezdőfeltételből közvetlenül adódik, hogy $v_2 = \beta$, $v_4 = \beta(1 + \alpha)$, $v_6 = \beta(1 + \alpha + \alpha^2)$, és általában

$$v_{2n} = \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}) = \beta \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}.$$

Innen (4) alapján

$$(6) \quad v_{2n-1} = \beta \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} + \gamma.$$

A kutya csak akkor ugorhat fel n -edszer is a szánkóra, ha utoléri azt, vagyis ha $v > v_{2n-1}$. Innen

$$n < 1 + \frac{\log\left(1 - \frac{(v-\gamma)(1-\alpha)}{\beta}\right)}{\log \alpha} = 1 + \frac{\log\left(\frac{u}{u+v} \cdot \frac{M+m}{M}\right)}{\log \frac{M}{M+m}} \approx 7,6.$$

A kutya tehát 7-szer tud a szánkóra felugrani, és a 7. felugrás után a közös sebességük $v_{14} = (u+v) \left[1 - \left(\frac{M}{M+m}\right)^7\right] \approx$

$3,90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ha a kutya még egyszer leugrana, akkor a szánkó sebessége 4,06 m/s-ra nőne.

Tekintsük most a II. értelmezést! A lendületmegmaradás törvénye ekkor (1) helyett

$$(1') \quad (M + m)v_{2n} = m(v_{2n+1} - u) + Mv_{2n+1}$$

módon írható fel, amelyből alakilag ugyanolyan összefüggések adódnak, mint az I. értelmezésnél, csupán az (5)-ben szereplő mennyiségek változnak meg:

$$(5') \quad \alpha = \frac{M}{m + M}, \quad \beta = \frac{m}{m + M} \left(\frac{M}{m + M}u + v\right), \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{m}{M + m}u.$$

A további képletek is változatlanul érvényesek, és a megadott számadatokkal ennél az értelmezésnél az adódik, hogy a kutya 8-szor ugorhat fel a szánkóra, és a végsebesség $v_{16} = 3,94$ m/s lesz.

() Koltai Péter (Révkomárom, Selye J. Gimn. 12. o.t.) és Szabó Áron (Debrecen, Fazekas M. Gimn. 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az olyan megoldás, amely nem ad meg általános képletet, hanem végigszámolja a 7 vagy 8 leugrást és felugrást, csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha közben nem végez kerekítést, vagy legalább utal arra, hogy a kerekítések nem befolyásolják a végeredményt. Az ezt elmulasztó, egyéb hibát nem tartalmazó megoldások 4 pontot kaptak.