Megoldás. *„Ha nem tudsz megoldani egy feladatot, csinálj belőle magadnak egy könnyebbet"* – tanácsolja *Pólya György* (1888–1985) „A gondolkodás iskolája" c. könyvében. Tegyük ezt most mi is, mindaddig, amíg csak egy olyan feladatig jutunk, amit már meg tudunk oldani. Innen visszafejtve a gondolatsort, talán kaphatunk ötleteket a nehezebb feladatok megoldásához.

Foglalkozzunk először az a) kérdéssel! Mi lenne, ha mindkét félgömbhéjon ugyanakkora, (Q, Q) töltés lenne? Mi lenne, ha a töltések ellentétes előjelűek $(Q, -Q)$ lennének? Ilyenkor jut az ember eszébe a síkkondenzátor.

A Q töltésű síkkondenzátor lemezein Q és $-Q$ töltés, a lemezek között E térerősségű homogén tér van. A kondenzátor energiája

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}x,$$

amiből látszik, hogy a lemezek közötti erő nagysága

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2}Q\frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2}QE.$$

Innen lépegessünk visszafelé! Ha nem Q és $-Q$, hanem Q és $+Q$ töltés van a lemezeken, akkor annyi a különbség, hogy nem vonzó, hanem taszító erő lép fel, E pedig annak a térerősségnek a nagysága, ami a lemezeken kívül jelenik meg.

Két szembefordított, Q töltéssel egyenletesen feltöltött gömbhéj elektromos tere ugyanaz, mint ami egyetlen gömbön kívül lép fel, ha az $2Q$ töltéssel van egyenletesen feltöltve. Ekkor a térerősség a gömbön kívül akkora, amekkora a $2Q$ nagyságú, a gömb közepén elhelyezett ponttöltéstől jönne létre:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Q}{R^2}.$$

A gömb felületén a töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{2Q}{4R^2\pi} = \frac{Q}{2R^2\pi} = (\varepsilon_0 E).$$

Ugyanitt az energiasűrűség (egységnyi térfogatra jutó energia, nyomás jellegű mennyiség):

$$p = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\,\sigma E.$$

Egy elektromosan töltött felület adott nagyságú darabkájára ható erőt a felület nagysága, töltéssűrűsége és a felület közvetlen közelében mérhető elektromos térerősség egyértelműen meghatározza. Ez az elektrosztatikus „nyomás" tehát nemcsak a síkkondenzátor, hanem a töltött félgömbhéj esetében is a fentebb kiszámított p-vel (az energiasűrűséggel) egyezik meg.

A félgömbhéjra ható eredő erő ugyanakkora, mint a félgömbhéjat gondolatban lezáró körlapra ható erő lenne p nyomás esetén (hiszen egy p nyomású gázba helyezett lezárt félgömbre a gáz által kifejtett eredő erő nyilván zérus). A kérdéses erő tehát

$$F = p\cdot R^2\pi = \frac{1}{2}\,\sigma E\cdot R^2\pi = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{R^2}.$$

Kiszámítottuk a két szembefordított, egyenként Q töltésű félgömbhéj között fellépő erőt. Térjünk vissza most az eredeti a) kérdéshez, ami az eddig tárgyalt esettől csak abban tér el, hogy az egyik félgömbhéjon nem Q, hanem q töltés van! Az elektrosztatikus erő arányos a test töltésével, ezért

$$F_a = \frac{q}{Q}\,F = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{R^2}.$$

Megjegyzés. Látható, hogy a Coulomb-törvényhez nagyon hasonló formulát kaptunk, csupán a képletben szereplő numerikus együttható tér el az ismert kifejezésétől. Akár meg is kereshetnénk azokat a pontokat a félgömbök belsejében, ahova elhelyezett Q illetve q ponttöltések éppen ekkora erőt fejtenek ki egymásra; ez azonban nem volt kérdés a feladatban. Megjegyezzük, hogy a kérdéses pontok *nem* esnek egybe a homogén tömegeloszlású félgömbhéjak tömegközéppontjaival, mint azt több versenyző tévesen állította. Az eltérésnek az az oka, hogy csak a *homogén* gravitációs erőtér hatása helyettesíthető a tömegközéppontba képzelt testre ható erővel, a Coulomb-féle erőtér pedig *inhomogén*!

A b) kérdés megoldásához ismét idézzük fel Pólya György tanácsát! A kérdéses aszimmetrikus elrendezés helyett tekintsünk egy szimmetrikusat, amit feltehetőleg egyszerűbb lesz kezelnünk. Egészítsük ki a b) elrendezést a „tükörképével" (*9. ábra*)! Írjuk fel a bal oldali két félgömbhéj által a jobb oldali két félgömbhéjra kifejtett eredő erőt! Ez négy erőből tehető össze:

$$F = F_{Q\to Q} + F_{q\to q} + F_{Q\to q} + F_{q\to Q}$$

Az összeg két utolsó tagja egyenlő egymással, és mindegyikük éppen az az F_b erő, amit keresünk! Ha tehát ki tudjuk számítani F-et, akkor $F_{Q\to Q}$ és $F_{q\to q}$ ismeretében (amelyeket az a) kérdésre tudunk visszavezetni) a keresett erő meghatározható.

9. ábra

9. ábra

F kiszámításához tekintsük azt az elektromos teret, amit két koncentrikus gömbhéj hoz létre: a belső, r sugarú, $2q$ töltésű gömbhéj és a külső, R sugarú, $2Q$ töltésű gömbhéj. Gyakorlatilag ez lesz a négy félgömnhéj által létrehozott elektromos tér is.

10. ábra

A kis gömbhéj belsejében az elektromos térerősség nulla. E gömb felületén a töltéssűrűség:

$$\sigma_q = \frac{q}{2r^2\pi},$$

a térerősség pedig a gömb felületénél, de kívül:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2}.$$

Ennek a kis gömbnek a tere a nagy gömb felületénél, annak belsejében:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{R^2}.$$

A nagy gömb felületén a töltéssűrűség:

$$\sigma_Q = \frac{Q}{2R^2\pi}.$$

A nagy gömbön kívüli térrészben a térerősségért mindkét gömb töltése felelős. Az elektromos térerősség nagysága

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q+2Q}{R^2}.$$

A fenti kifejezések segítségével – az *a*) kérdésnél alkalmazott gondolatmenetet követve – F-et a következő módon számíthatjuk ki:

$$F = \frac{1}{2}\sigma_q\, E_1\, r^2\pi + \frac{1}{2}\sigma_Q(E_2+E_3)R^2\pi.$$

Behelyettesítve σ_q, σ_Q, E_1, E_2 és E_3 fenti kifejezéseit, F meghatározható.

Az *a*) kérdésre adott választ felhasználva

$$F_{Q\to Q} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{R^2} \qquad \text{és} \qquad F_{q\to q} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{r^2}.$$

Ezek után a keresett $F_b = F_{q\to Q}$-ra kapjuk:

$$F_b = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{R^2}.$$

Az eredmény meglepő, hiszen független r-től, így a *b*) esetben is ugyanakkora az erő, mint az *a*) esetben! (Ennyi számolás után meg is érdemeltünk egy kellemes meglepetést.)

Megjegyzés. A *b*) kérdést megválaszoló versenyzők több kiváló ötlettel is éltek. *Nagy Márton* (Budapest) gondolatban körülvette a *11.a ábrán* látható elrendezést (amelyen az egyszerűség kedvéért csak a kisebb félgömbhéjra ható erőt tüntettük fel) egy R-nél „hajszálnyival” nagyobb sugarú, $-2Q$ töltésű gömbhéjjal (*11.b ábra*). Így a félgömbhéjak között ható erőt nem változtatta meg, hiszen az egyenletesen töltött gömbhéj térerőssége belül nulla. Ez az elrendezés nyilván egyenértékű a *11.c ábrán* láthatóval, amiből $-Q$ előjelét megváltoztatva a *11.d ábrán* feltüntetetthez jutunk. Tükrözzük ezt az elrendezést a félgömbhéjak képzeletbeli határsíkjára (*11.e ábra*). Azt kaptuk, hogy a Q töltésű (egyenletes töltésű) félgömbhéj ugyanakkora erőt fejt ki egy „benne lévő” másik, q töltésű félgömbhéjra, mint amekkorát egy „belőle kilógó” q töltésű félgömbhéjra. Ezek szerint egy $2q$ töltésű gömbre a nagy félgömbhéj $2F$ erőt fejtene ki, q össztöltésű gömbre pedig ennek felét, F-et (*11.f ábra*).

11. ábra

Most már csak a hatás–ellenhatás törvényét kell alkalmaznunk: a q töltésű gömb (amelynek elektromos tere a gömbön kívül egy ponttöltés terével is helyettesíthető, tehát nem függ r-től!) a Q töltésű félgömbhéjra éppen a keresett F nagyságú erőt fejti ki (*11.g ábra*). A végeredmény a Coulomb-törvény és a gáznyomásos hasonlat alkalmazásával adódik:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R^2}\cdot\frac{Q}{2\pi R^2}\cdot R^2\pi = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{R^2}.$$

Még tovább ment a feladat általánosításában *Csóka Endre* (Debrecen), aki – a fentiekhez hasonló „tükrözéses módszerrel" – megmutatta, hogy a félgömbhéjak között ható F erő nagysága akkor is a fent kiszámított érték, ha a két félgömb szimmetriatengelye tetszőleges α szöget zár be egymással. Az erő nagysága a töltések szorzatán kívül csak a nagyobb félgömbhéj sugarától függ, iránya pedig a nagyobb félgömb szimmetriatengelyével párhuzamos, jóllehet a hatásvonala általában nem megy át a félgömbhéjak közös középpontján (*12.a ábra*). Ez az eredmény is meglepő, hiszen ha r és R majdnem egyforma nagyságúak, egyikük csupán egy parányival nagyobb a másiknál, akkor az erő iránya ugrásszerűen változik, attól függően, hogy melyik sugár is a nagyobb (*12.b* és *12.c ábrák*).

12. ábra

12. ábra