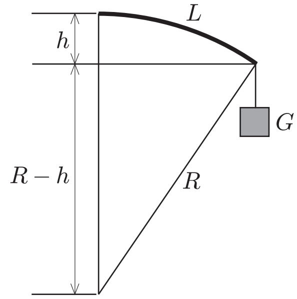
I. megoldás. Jelöljük a pálca hosszát L-lel, az útmutatásban szereplő arányossági tényezőt pedig C-vel! Tekintsük először a kezdetben vízszintesen pálcát, amelynek egyik vége G súly hatására h távolsággal lehajlik. Közelítsük a meghajlított pálca alakját egyetlen R sugarú körívvel!

Megjegyzés. Tudjuk ugyan, hogy a pálca görbülete (görbületi sugarának reciproka) a pálca egyes darabkáira ható forgatónyomatéktól függ, s emiatt a rögzítésnél a legnagyobb, a másik vége felé haladva egyre kisebbé válik, és a terhelésnél már nullára csökken. A görbület tehát nem lehet állandó, ennek ellenére – a számítás egyszerűsítése érdekében – mégis ezzel a durva közelítéssel élünk, hiszen nem pontos eredményt, hanem csak nagyságrendi becslést kívánunk kapni a keresett kritikus F terhelésre.



1. ábra

Ebben a közelítésben a görbületi sugár a Pitagorasz-tételből számítható (*1. ábra*):

$$R^2 \approx (R-h)^2 + L^2,$$

ahonnan $h \ll L$ miatt

$$R \approx \frac{L^2}{2h} \approx 50 \text{ m}. \tag{1}$$

(A kicsiny lehajlás miatt a meghajlított pálca vízszintes vetületének hosszát ugyancsak L-nek vettük.)

Vizsgáljuk most az energiaviszonyokat! Gondoljuk el, hogy a lehajlított pálca egyensúlyi állapota úgy jött létre, hogy saját erőnkkel szép lassan lenyomtuk a pálca végét (ehhez a lehajlással arányosan fokozatosan növekvő erőt kellett kifejtenünk), majd amikor elértük a megadott h értéket, ráakasztottuk a pálcára a G súlyt. Mivel az általunk kifejtett erő az elmozdulással arányosan nőtt, átlagosan a maximális erő felével számolhatunk, a végzett munkánk tehát

$$W = \frac{F_{\max}}{2} h = \frac{G}{2} h. \tag{2}$$

Ez a munka a pálca rugalmas energiáját növelte (a pálca saját súlyát elhanyagoljuk), tehát

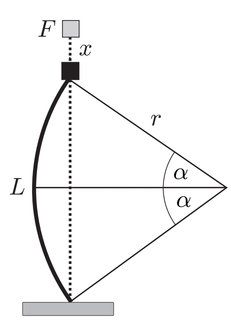
$$W = C \frac{L}{R^2}, \tag{3}$$

amiből (1) és (2) felhasználásával az arányossági tényezőre

$$C = \frac{G}{2} h \cdot \frac{R^2}{L} = \frac{GL^3}{8h} = 125 \text{ J} \cdot \text{m}$$

adódik.

Megjegyzés. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a pálcából és a rá akasztott G súlyból álló rendszer energiáját vizsgáljuk a pálca x lehajlásának függvényében. Egyensúlyi állapotban az összenergia (ami x másodfokú függvényével közelíthető) minimális. Ha viszont a pálca rugalmas energiáját a nehezék helyzeti energiájának csökkenésével tesszük egyenlővé, egy kettes faktorban eltérő, hibás eredményt kapunk!



2. ábra

Tekintsük most a függőlegesen terhelt pálcát. Képzeljük el, hogy a pálca tetejére F nagyságú súlyt helyeztünk, amelynek hatására a pálca a *2. ábrán* látható módon meghajlik. Ez nyilván csak akkor következhet be, ha a teher helyzeti energiájának csökkenése fedezi a pálca rugalmas energiájának növekedését. A pálca alakját ismét egyetlen körívvel közelítjük, melynek sugarát r-rel jelöljük. (Természetesen r és a korábban szereplő R nem egyenlő!) Az ábrán látható szög (radiánban mérve)

$$\alpha = \frac{L}{2r},$$

és mivel ez a szög kicsiny, érvényes rá a

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$$

közelítő összefüggés. (Ez a formula differenciálszámítás felhasználásával vezethető le, de numerikusan akár egy zsebszámológéppel is könnyen ellenőrizhető.)

A pálca rugalmas energiájának növekedése

$$\Delta E_1 = C\frac{L}{r^2},$$

a súly helyzeti energiájának csökkenése pedig

$$-\Delta E_2 = F\cdot x = F\left(2r\alpha - 2r\sin\alpha\right) \approx 2Fr\,\frac{\alpha^3}{6} = \frac{1}{24}\,\frac{FL^3}{r^2}.$$

A pálca „spontán" kihajlásának feltétele: $|\Delta E_2| > \Delta E_1$, azaz

$$\frac{1}{24}\,\frac{FL^3}{r^2} > C\frac{L}{r^2}.$$

Ez a feltétel – r értékétől függetlenül – mindig teljesül, ha

$$F > F_{\text{kritikus}} = 24\frac{C}{L^2} = 3G\,\frac{L}{h} \approx 3000\ \text{N}.$$

() *Szabó Áron* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az egyik végén mereven befogott, másik végén súllyal terhelt vízszintes rúd (pálca) lehajlása (lásd pl. a Négyjegyű függvénytáblázatban a „Rugalmas alakváltozások"-nál) az I. megoldásban használt jelöléseket követve

$$h = \frac{1}{3}L^3 EI\,G,$$

ahol E a rúd anyagának Young-modulusa, I pedig a rúd vastagságától és a keresztmetszetének alakjától függő ún. másodrendű keresztmetszeti nyomatéka. Innen kifejezhetjük az EI szorzatot:

$$EI = \frac{L^3G}{3h}. \tag{4}$$

A függőlegesen terhelt rúd kritikus terhelése (az ún. Euler-féle kritikus érték)

$$F_{\text{kritikus}} = EI\,\frac{\pi^2}{L^2}. \tag{5}$$

(Ez az összefüggés levezethető a rugalmas alakváltozások lineáris elméletéből, lásd pl. R. Feynman: *Mai fizika,* 7. kötet, vagy megtalálható a *„Mechanika szakközépiskolások számára",* Tankönyvkiadó, 1972. tankönyvben.) Az EI állandó (4)-beli értékét (5)-be helyettesítve a kritikus terhelésre

$$F_{\text{kritikus}} = \frac{\pi^2}{3}\,G\,\frac{L}{h} \approx 3300\ \text{N}.$$

() *László Eszter* (Pécs, Leöwey Klára Gimn., 9. o.t.)

Megjegyzés. A II. megoldásban hivatkozott képletek a lineáris (a Hooke-törvényt követő) rugalmasságtani egyenletek pontos megoldásaként adódnak, míg az I. megoldás összefüggései – a görbület állandóságának feltételezése miatt – csak közelítő jellegűek. A számítás pontosságát úgy lehetne javítani, ha a pálca alakját több (mondjuk 2 vagy 3) különböző sugarú körívvel közelítenénk, és a rugalmas energiát szakaszonként számolnánk ki.

A „pontos" megoldás szerint a vízszintesen befogott pálca alakja egy harmadfokú polinommal írható le, a függőlegesen terhelt pálca pedig (kicsiny kihajlások esetén) egy fél szinuszhullámmal adható meg. A kétféle tárgyalás pontossága egymással is összevethető, ha kihasználjuk, hogy az EI szorzat éppen a C együttható 2-szerese. Eszerint a vízszintes rúd lehajlásának az erő kiszámításánál a „helyes" érték 4/3-szorosát, a függőleges rúd esetében pedig $12/\pi^2$-szeresét kaptuk, a két erő arányát pedig mindössze egy $9/\pi^2$-es faktor, vagyis kb. 10 százalékos hibával kaptuk meg.

Meglepő, hogy az alkalmazott durva közelítés – felsőbb matematikai módszerek alkalmazása nélkül – milyen jó becslést ad a kérdéses kritikus terhelésre.

() *(G. P.)*