I. megoldás. Vizsgáljuk először a $k>1$ esetet! A kérdéses ε szög – amely a vizsgált tartományban hegyesszög – akkor a legnagyobb, amikor a tangense maximális. Ez viszont könnyen kifejezhető α-val:

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{F\sin\alpha}{Fk+F\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{k+\cos\alpha}=f(\alpha).$$

Ennek a függvénynek a maximumát differenciálszámítás segítségével határozhatjuk meg. A derivált eltűnésének feltétele:

$$f'(\alpha)=\frac{\cos\alpha\cdot(k+\cos\alpha)-\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{(k+\cos\alpha)^2}=\frac{k\cos\alpha+1}{(k+\cos\alpha)^2}=0,$$

ahonnan a szélsőértéknek megfelelő α_0 szögre $\cos\alpha_0=-\dfrac{1}{k}$. Ennél a szögnél az $f(\alpha)$ függvény második deriváltja negatív, tehát α_0-nál valóban maximumot találunk. ε legnagyobb értéke:

$$\varepsilon_{\max}=\operatorname{arctg}f(\alpha_0)=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

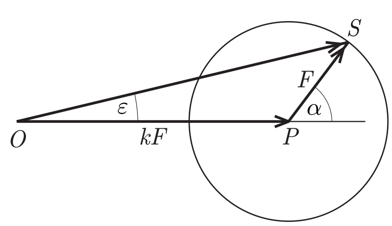
Látható, hogy $\alpha_0>90^\circ$, de $\varepsilon_{\max}<90^\circ$.

Ha $k=1$, akkor a két összegzendő erő egy rombuszt feszít ki. Az eredő erő ennek a rombusznak az átlója, ami szögfelelő, tehát $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$. Ha $0<\alpha<180^\circ$, akkor $0<\varepsilon<90^\circ$. Ezen tartományon ε-nak nincs legnagyobb értéke, csak felső határa (nevezetesen a derékszög), és ezt a felső határt tetszőlegesen megközelítheti. Ha $\alpha=180^\circ$, akkor az eredő erő nullvektor, melynek nincs határozott iránya.

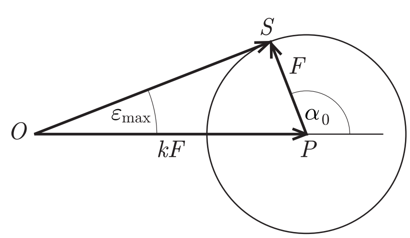
() *Mezei Márk* (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. A feladat elemi geometriai úton is megoldható. Az eredő $\overrightarrow{OS}$ erőt úgy is megkaphatjuk, hogy a kF nagyságú $\overrightarrow{OP}$ erő végpontjából felmérjük az F nagyságú $\overrightarrow{PS}$ erőt (*1. ábra*). Ha az α szöget változtatjuk, az S pont egy F sugarú köríven fog mozogni. Az ε szög akkor a legnagyobb, amikor az OS egyenes érinti a kört, vagyis ha OS merőleges PS-re (*2. ábra*). Ennek a helyzetnek megfelelő szögekre fennáll: $\cos(180^\circ-\alpha_0)=-\cos\alpha_0=\dfrac{1}{k}$, illetve

$$\sin\varepsilon_{\max}=\frac{F}{kF},\qquad \text{azaz}\qquad \varepsilon_{\max}=\arcsin\frac{1}{k}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$



1. ábra



2. ábra

Ha $k=1$, akkor az O pont rajta fekszik a körön. Ilyenkor az ε szög 0 és 90° között változik, de a felső határát (a derékszöget) nem érheti el, csak tetszőlegesen megközelítheti azt.

() *Sótér Anna* (Székesfehérvár, Ciszterci Szent István. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján