1. *Egy-egy kerék tehetetlenségi nyomatékának meghatározása*

Egy 0,025 M tömegű, 0,8 R sugarú küllő tehetetlenségi nyomatéka (a végpontjára vonatkoztatva) az ismert $\Theta = ml^2/3$ elméleti formula alapján $\Theta_{\text{küllő}} = 5{,}33 \cdot 10^{-3} MR^2$. A kerék hengeres részének tehetetlenségi nyomatéka a tömör henger és a lyukat kitöltő tömör henger tehetetlenségi nyomatékának különbségeként számolható. A tömeg- és területarányok egyenlősége alapján kapható, hogy $m_{\text{tömör}} = 2{,}22\ M$, $m_{\text{lyuk}} = 1{,}42\ M$, a sugarak pedig 0,8 R és R. Felhasználva, hogy egy tömör henger esetén $\Theta = mR^2/2$, a vizsgált henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_{\text{henger}} = \Theta_{\text{tömör}} - \Theta_{\text{lyuk}} = \dfrac{1}{2}\left[m_{\text{tömör}}R^2 - m_{\text{lyuk}}(0{,}8\,R)^2\right] = 0{,}656\,MR^2$, a kerék egészének tehetetlenségi nyomatéka pedig: $\Theta = \Theta_{\text{henger}} + 8\Theta_{\text{küllő}} = 0{,}699\,MR^2 \approx 0{,}7\,MR^2$.

2. *A mozgásegyenletek*

Az $5M$ tömegű kocsitestre a nehézségi erő és a kerekek (azok forgástengelye) által kifejtett erő hat.

4. ábra

4. ábra

A kerekek által kifejtett erőket célszerű lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontani. Mivel a kocsitest a lejtőn lefelé haladva gyorsul, de nem forog, mozgásegyenletei a *4. ábra* jelöléseivel a következő alakba írhatók:

$$5\,Ma = 5\,Mg\sin\alpha - K_1 - K_2, \tag{1}$$

(2) $$5Mg\cos\alpha = N_1 + N_2,$$

(3) $$N_2 l = N_1 l + K_1 h + K_2 h.$$

Az M tömegű, R sugarú, $0{,}7\,MR^2$ tehetetlenségi nyomatékú hátsó kerékre a gravitációs erőn túl tengelynél a kocsitest, a talajjal érintkező pontban pedig a lejtő fejt ki erőt (*5. ábra*). A kerék tömegközéppontjának gyorsulása a, a szöggyorsulást pedig jelölje β_1. A kerék mozgásegyenletei:

(4) $$Ma = K_1 - S_1,$$

(5) $$Mg\,\cos\alpha + N_1 = T_1,$$

(6) $$0{,}7\,MR^2\beta_1 = S_1 R.$$

Ha a hátsó kerék tisztán gördül, akkor:

(7/a) $$a = R\beta_1,$$

ha viszont csúszva gördül, akkor:

(7/b) $$S_1 = \mu_{\mathrm{k}} N_1.$$

5. ábra

5. ábra

6. ábra

$$Ma = K_2 - S_2, \tag{8}$$

$$Mg\,\cos\alpha + N_2 = T_2, \tag{9}$$

6. ábra

Az első keréknél (*6. ábra*) a hátsó kerékhez hasonlóan:

$$Ma = K_2 - S_2, \tag{8}$$

$$Mg\,\cos\alpha + N_2 = T_2, \tag{9}$$

(10) $$0{,}7\,MR^2\beta_2 = S_2 R.$$

Tiszta gördülésnél

(11/a) $$a = R\beta_2,$$

ha pedig csúszva gördül, akkor:

(11/b) $$S_2 = \mu_\mathrm{k} N_2.$$

3. *A különböző mozgástípusok elemzése*

a) Tételezzük fel, hogy olyanok a viszonyok, hogy *mindkét kerék tisztán gördül.* Ekkor az (1)–(11) egyenletrendszer tiszta gördülésre vonatkozó egyenleteinek megoldása:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{5}{6} g\sin\alpha, \qquad \beta_1 = \beta_2 = \frac{5}{6}\frac{g}{R}\sin\alpha,\\
S_1 &= S_2 = \frac{7}{12} Mg\sin\alpha,\\
K_1 &= K_2 = \frac{5}{12} Mg\sin\alpha,\\
N_1 &= \left(\frac{5}{2}\cos\alpha - \frac{5\,h}{12\,l}\right) Mg, \qquad N_2 = \left(\frac{5}{2}\cos\alpha + \frac{5\,h}{12\,l}\right) Mg\\
T_1 &= \left(\frac{7}{2}\cos\alpha - \frac{5\,h}{12\,l}\right) Mg, \qquad T_2 = \left(\frac{7}{2}\cos\alpha + \frac{5\,h}{12\,l}\right) Mg.
\end{aligned}$$

A feltételezett tiszta gördülés akkor jön létre, ha $S_1 \le \mu_\mathrm{s} T_1$ és $S_2 \le \mu_\mathrm{s} T_2$ teljesül. Az erők behelyettesítésével látható, hogy a két feltétel közül a hátsó kerékre vonatkozó az erősebb, nevezetesen (a lejtő hajlásszögére megfogalmazva)

$$\operatorname{tg}\alpha \le \frac{\mu_\mathrm{s}}{1 + \frac{5h}{7l}\mu_\mathrm{s}}.$$

b) Ha a lejtő hajlásszöge egy kicsit meghaladja ezt a kritikus értéket, akkor *a hátsó kerék csúszva, az első kerék pedig tisztán gördül.* Az (1)–(11) egyenletrendszernek ezt az állapotot leíró egyenleteiből – hosszú számolással – a következőt kaphatjuk:

$$a = \frac{\left(1 + \frac{5\,h\mu_\mathrm{k}}{14\,l}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}\mu_\mathrm{k}\cos\alpha}{\frac{11}{10} + \frac{5\,h}{11\,l}\mu_\mathrm{k}}.$$

Az első kerék tiszta gördülésének feltétele: $S_2 \le \mu_\mathrm{s} T_2$. Ezt a feltételt a hajlásszögre kifejtve a következő adódik:

$$\operatorname{tg}\alpha \le \frac{6\mu_\mathrm{s} + 77\mu_\mathrm{k} + \frac{325\,h}{7\,l}\mu_\mathrm{s}\mu_\mathrm{k}}{14 - \frac{5h}{l}\left(\mu_\mathrm{s} - \mu_\mathrm{k}\right)}.$$

c) Ha a lejtő hajlásszöge ezt kritikus értéket is meghaladja, akkor *mindkét kerék csúszva gördül.* Az (1)–(11) egyenletrendszer ide vonatkozó egyenleteiből a kocsi gyorsulására és a kerekek szöggyorsulására a következő eredmény adódik:

$$\begin{aligned}
a &= g\left(\sin\alpha - \mu_\mathrm{k}\cos\alpha\right),\\
\beta_1 &= \frac{5}{7}\frac{g}{R}\mu_\mathrm{k}\left(7 - \frac{5\,h}{l}\mu_\mathrm{k}\right)\cos\alpha,\\
\beta_2 &= \frac{5}{7}\frac{g}{R}\mu_\mathrm{k}\left(7 + \frac{5\,h}{l}\mu_\mathrm{k}\right)\cos\alpha.
\end{aligned}$$

4. *A hirtelen megcsúszó jármű esete*

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az álló helyzetből induló jármű kerekei d úton tisztán gördülnek, majd $s-d$ úton mozgásuk csúszva gördülés. Jelölje a_t, illetve a_cs a jármű gyorsulását a tiszta gördülés, illetve a csúszás szakaszában, $\beta_\text{első}$, illetve $\beta_\text{hátsó}$ a kerekek szöggyorsulását a csúszva gördülés idején. (Ezeket a mennyiségeket a 3. részfeladatban meghatároztuk.) Az egyenletesen változó mozgásra vonatkozó kinematikai összefüggések felhasználásával könnyen kapható a jármű végsebessége, illetve az egyes kerekek szögsebessége:

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{2a_\mathrm{t}d + 2a_\mathrm{cs}(d-s)},\\
\omega_\text{első} &= \frac{\sqrt{2a_\mathrm{t}d}}{R} + \beta_\text{első}\frac{\sqrt{2a_\mathrm{t}d + 2a_\mathrm{cs}(d-s)} - \sqrt{2a_\mathrm{t}d}}{a_\mathrm{cs}},\\
\omega_\text{hátsó} &= \frac{\sqrt{2a_\mathrm{t}d}}{R} + \beta_\text{hátsó}\frac{\sqrt{2a_\mathrm{t}d + 2a_\mathrm{cs}(d-s)} - \sqrt{2a_\mathrm{t}d}}{a_\mathrm{cs}}.
\end{aligned}$$