1. Ha egy gömb alakú, kicsiny elektródából homogén és végtelen közegben I állandó áram folyik ki, akkor a szimmetria miatt nyilvánvaló, hogy az áramsűrűség csak az elektródától mért távolságtól függ, az iránytól nem. A töltésmegmaradás miatt egy tetszőleges r sugarú, elektróda középpontú gömbfelületen I áram folyik ki át (*2. ábra*), ezért

$$j = \frac{I}{4\pi r^2},$$

vagy az irányokat is figyelembe véve

$$\mathbf{j} = \frac{I}{4\pi r^3}\mathbf{r}.$$

2. Ha az előzőekben vizsgált szituációban a közeg fajlagos ellenállása ϱ, akkor a differenciális Ohm-törvény alapján az elektróda által létrehozott elektromos térerősség az $\mathbf{r}$ helyvektorú pontban

$$\mathbf{E} = \varrho \cdot \mathbf{j} = \frac{I\varrho}{4\pi r^3}\mathbf{r}.$$

Vegyük észre, hogy ez az elektromos mező egy $Q = \varepsilon_0 \varrho I$ nagyságú pontszerű töltés, vagy egy töltött gömb (gömbön kívüli) elektromos terével egyezik meg.

3. ábra

Tekintsük most a feladatban leírt esetet! A zsákmány belsejében elképzelt két, egymástól viszonylag távol lévő gömb egyikéből I_{zs} áram folyik ki, a másik gömbbe pedig I_{zs} áram folyik be. A gömbök között végtelen, homogén, ϱ fajlagos ellenállású közeg van. A kialakuló elektromos mező és árameloszlás (az elektromos mezőt leíró egyenletek linearitása miatt) felfogható úgy, mint egy végtelen, homogén közegben elhelyezkedő $+Q$ töltésű és egy tőle l_{zs} távolságra levő $-Q$ töltésű gömbelektróda elektromos és áramterének lineáris szuperpozíciója. A *3. ábra* jelöléseivel az egyes mezők térerősségei és potenciáljai:

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+^3}\mathbf{r}_+ = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi r_+^3}\mathbf{r}_+, \qquad U_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_+} = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi r_+},$$

illetve

$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)}{r_-^3}\mathbf{r}_- = -\frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi r_-^3}\mathbf{r}_-, \qquad U_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)}{r_-} = -\frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi r_-}.$$

A szuperpozíció eredménye:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{r}_+}{r_+^3} - \frac{\mathbf{r}_-}{r_-^3}\right),$$
$$U = U_+ + U_- = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right).$$

A feladatban vizsgálandó P pontban $r_+ = r_- = r$, valamint $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = \mathbf{l}_{\mathrm{zs}}$, ezért a ragadozó helyén az elektromos térerősség

$$\mathbf{E}_P = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi r^3}\mathbf{l}_{\mathrm{zs}}.$$

Felhasználva, hogy $r \approx y$,

$$\mathbf{E}_P = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi y^3}\mathbf{l}_{\mathrm{zs}}.$$

3. Jelölje a zsákmányállatot modellező két gömb alakú áramforrás közül a negatív elektróda potenciálját U_x, a pozitív elektródáét pedig U_y. Ezek a potenciálok az általános képlet segítségével az r_{zs} sugarú elektródák felületén is meghatározható:

$$U_x = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi}\left(\frac{1}{l_{\mathrm{zs}} - r_{\mathrm{zs}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{zs}}}\right), \qquad U_y = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{zs}}} - \frac{1}{l_{\mathrm{zs}} - r_{\mathrm{zs}}}\right)$$

Az elektródák közötti U_{zs} feszültség a potenciálok különbségeként kapható:

$$U_{\mathrm{zs}} = U_y - U_x = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{2\pi r_{\mathrm{zs}}}\frac{l_{\mathrm{zs}} - 2r_{\mathrm{zs}}}{l_{\mathrm{zs}} - r_{\mathrm{zs}}}.$$

Felhasználva, hogy $r_{\mathrm{zs}} \ll l_{\mathrm{zs}}$, a zsákmányban elképzelt forrásgömbök közötti feszültség:

$$U_{\mathrm{zs}} = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{2\pi r_{\mathrm{zs}}}.$$

A forrásgömbök közötti R_{zs} ellenállás, és a forrás P_{zs} teljesítménye könnyen kaphatók:

$$R_{\mathrm{zs}} = \frac{U_{\mathrm{zs}}}{I_{\mathrm{zs}}} = \frac{\varrho}{2\pi r_{\mathrm{zs}}}, \qquad P_{\mathrm{zs}} = U_{\mathrm{zs}} I_{\mathrm{zs}} = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}^2}{2\pi r_{\mathrm{zs}}}.$$

4. A zsákmány által keltett elektromos mező homogénnek tekinthető a ragadozó helyén, térerőssége a korábban meghatározott $\mathbf{E}_P$, ezért a helyettesítő kapcsolásban U-val jelölt feszültség:

$$U = E_{\mathrm{r}}\, l_{\mathrm{d}} = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi y^3}\, l_{\mathrm{zs}} l_{\mathrm{d}},$$

ahol l_{d} a ragadozó érzékelő (detektáló) gömbjeinek távolságát jelöli, a gömbök sugara pedig r_{d} ($r_{\mathrm{d}} \ll l_{\mathrm{d}}$).

A környező tengervíz R_{v} ellenállása az R_{zs}-vel való analógia alapján:

$$R_{\mathrm{v}} = \frac{\varrho}{2\pi r_{\mathrm{d}}}.$$

A modellben szereplő soros kapcsolású áramkörben a kérdezett U_{d} feszültség és P_{d} teljesítmény egyszerűen számolható:

$$U_{\mathrm{d}} = U\frac{R_{\mathrm{d}}}{R_{\mathrm{d}} + R_{\mathrm{v}}} = \frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi y^3}\, l_{\mathrm{zs}} l_{\mathrm{d}}\, \frac{R_{\mathrm{d}}}{R_{\mathrm{d}} + \frac{\varrho}{2\pi r_{\mathrm{d}}}},$$

illetve

$$P_{\mathrm{d}} = \frac{U_{\mathrm{d}}^2}{R_{\mathrm{d}}} = \left(\frac{\varrho I_{\mathrm{zs}}}{4\pi y^3} l_{\mathrm{zs}} l_{\mathrm{d}}\right)^2 \frac{R_{\mathrm{d}}}{\left(R_{\mathrm{d}} + \frac{\varrho}{2\pi r_{\mathrm{d}}}\right)^2}.$$

Megjegyzés. Az áramkör helyettesítő kapcsolása alapján megállapíthatjuk, hogy az elrendezés éppen olyan, mintha egy U elektromotoros erejű, R_{v} belső ellenállású feszültségforrásra R_{d} nagyságú terhelő ellenállást kötöttünk volna.

Jóllehet a verseny során a résztvevőktől nem kérték annak belátását, hogy a rendszer (vagyis a ragadozó + zsákmány + tengervíz) elektromos szempontból a megadott áramkörrel helyettesíthető, de „versenyen kívül” tanulságos lehet ennek végiggondolása.

Induljunk ki abból a helyzetből, amelyben a ragadozó halon még nem tud áram folyni (mondjuk azért, mert a hal „kikapcsolta” a detektáló egységét, vagyis annak belső ellenállása végtelen nagy). A hal közelében E_{r} az elektromos térerősség, az egymástól l_{d} távol levő érzékelői között tehát $U = E_{\mathrm{r}}\, l_{\mathrm{d}}$ feszültség alakul ki.

Kapcsoljuk most be a hal detektáló egységét, csökkentsük le a hal belső ellenállását a megadott R_{d} értékre! Ekkor a halon keresztül valamekkora I áram indul meg, s ez a ragadozó halat modellező két gömböt elektromosan töltötté teszi (az egyik pozitív, a másik negatív töltésű lesz). Ha nem lenne a környező tengervíz, akkor a hal testében folyó áramnak – a töltésmegmaradás törvénye miatt – előbb-utóbb meg kellene szűnnie. Ilyen esetben tehát a gömbök feltöltődése csak addig tarthatna, amíg az feltöltődés következtében kialakuló elektromos erőtér a külső erőtérrel együtt éppen nulla potenciálkülönbséget eredményez a két gömb között.

Más a helyzet azonban akkor, amikor a hal testén átáramló töltések a környező tengervízben vissza tudnak jutni az eredeti helyükre. Ekkor folyamatos I áram alakul ki, a halra (a modellben a két gömbre) jutó U_{d} feszültség pedig nullától különböző lesz. Ez a feszültség kétféle módon is kiszámítható. Egyrészt úgy, mint

$$U_{\mathrm{d}} = IR_{\mathrm{d}}$$

(Ohm-törvény). Másrészt úgy is megkapható, mint az eredő elektromos térerősségnek (vagyis a zsákmány által a ragadozó helyén létrehozott „külső” E_{r} és a gömbök feltöltődése miatt kialakuló E_1 különbségének) és az l_{d} távolságnak a szorzata:

$$U_{\mathrm{d}} = (E_{\mathrm{r}} - E_1)\ l_{\mathrm{d}}.$$

A jobb oldalon a zárójelet felbontva az első tag éppen a külső erőtér által létrehozott U feszültséggel egyezik meg, a második tag pedig kifejezhető a környező tengervíz „effektív ellenállásával”:

$$E_1 l_{\mathrm{d}} = IR_{\mathrm{v}}.$$

Mindezeket összevetve végül felírhatjuk, hogy $U - IR_{\mathrm{v}} = IR_{\mathrm{d}}$, s ez valóban a megadott helyettesítő kapcsolás feszültség-áram viszonyainak felel meg.

5. Az R_{d} függvényében vizsgált P_{d} teljesítmény akkor maximális, ha az

$$\frac{R_{\mathrm{d}}}{\left(R_{\mathrm{d}} + \frac{\varrho}{2\pi r_{\mathrm{d}}}\right)^2}$$

kifejezés maximális, vagy ennek reciproka minimális. Közismert, hogy ez

$$R_{\mathrm{d}} = R_{\mathrm{v}} = \frac{\varrho}{2\pi r_{\mathrm{d}}}$$

esetén következik be (vagyis akkor, amikor a „telepet” éppen a „belső ellenállásával” egyenlő nagyságú ellenállással terheljük). Ezt például a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával, vagy deriválással láthatjuk be.

P_{d} maximuma behelyettesítéssel kapható:

$$P_{\mathrm{d}}^{(\max)} = \frac{\varrho\,(I_{\mathrm{zs}} l_{\mathrm{zs}} l_{\mathrm{d}})^2\, r_{\mathrm{d}}}{32\pi y^6}.$$