Jelöljük a rudak eredeti hosszát l_i-vel, a tömegüket m_i-vel, lineáris hőtágulási együtthatójukat pedig α_i-vel (ahol $i=1$ a bal oldali, $i=2$ pedig a jobb oldali rudra utal).

A hőmérséklet ΔT nagyságú növekedtével az egyes fémrudak hossza $l_i\alpha_i\Delta T$ értékkel növekszik, a teljes hosszváltozás tehát

(1) $$\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (l_1\alpha_1 + l_1\alpha_1\Delta T.$$

Ha ismernénk a rúd valamelyik pontjának, például az S tömegközéppontnak az elmozdulását, akkor már bármely más pontjának, így a ragasztás R helyének elmozdulását is meg tudnánk határozni.

A rudakra kezdetben csak függőleges erők hatnak, s ha a fonalak h hossza sokkal nagyobb, mint a rudaké, akkor a kicsit kitágult rudakra ható erők is majdnem pontosan függőleges irányúak. Ebből – naívan – arra következtethetünk, hogy a rendszer tömegközéppontja nem mozdul el. Ez azonban – mint az alábbiakból kiderül – *hibás* következtetés!

A fonalakat (hacsak a tömegközéppont nem esik éppen véletlenül a felezőpontra) különböző nagyságú erők feszítik. Nagyságuk az *1. ábrán* látható A és B pontokra felírt forgatónyomatékok egyensúlyából határozhatjuk meg:

(2) $$F_1 = \frac{m_1(l_2+\frac{1}{2}l_1) + m_2\frac{1}{2}l_2}{l_1+l_2}\,g, \qquad F_2 = \frac{m_2(l_1+\frac{1}{2}l_2) + m_1\frac{1}{2}l_1}{l_1+l_2}\,g.$$

Az új (a rudak felmelegítése után kialakuló) egyensúlyi helyzetben a fonalak alsó vége valamekkora Δx_1 és Δx_2 távolsággal eltér az eredeti helyzettől (*2. ábra*), emiatt a fonalakban ható erőknek lesz vízszintes összetevője is. Mivel más vízszintes irányú erő nem hat, fenn kell álljon, hogy

(3) $$F_1\cdot\frac{\Delta x_1}{h} - F_2\cdot\frac{\Delta x_2}{h} = 0.$$

(Felhasználtuk, hogy a fonalak iránya csak kicsit tér el a függőlegestől, emiatt a fonálerők nagyságának változását, valamint a rúdnak a vízszintestől való eltérését nem kell figyelembe vennünk.) A (3) egyenlet

(4) $$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

alakba is írható, s ez jól mutatja, hogy az összeragasztott rúd végeinek elmozdulása h nagyságától függetlenül – tehát tetszőlegesen hosszú fonalak esetén is – mindig ugyanolyan arányban osztozik a teljes

(5) $$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta L$$

hossznövekményen. A (2), (4) és (5) egyenletekből kiszámíthatjuk a rúd bal oldali A végpontjának elmozdulását:

(6) $$\Delta x_1 = \frac{m_2(l_1+\frac{1}{2}l_2) + m_1\frac{1}{2}l_1}{(m_1+m_2)(l_1+l_2)}\,(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\cdot\Delta T,$$

majd ebből és a bal oldali rúd hosszának megváltozásából az R pont elmozdulását (a jobb fele mutató irányt véve pozitívnak):

$$\Delta x_R = l_1\alpha_1\Delta T - x_1 = \frac{(m_1l_1+m_2l_2)(\alpha_1l_1-\alpha_2l_2) + 2l_1l_2(m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2)}{2(m_1+m_2)(l_1+l_2)}\Delta T.$$

Ennek a kifejezésnek az előjele dönti el, hogy merrefelé mozdul el a két rúd érintkezési helye. Ha

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{m_1l_1+m_2l_2+2m_2l_1}{m_1l_1+m_2l_2+2m_1l_2},$$

akkor az R pont jobbra mozdul el, ellenkező esetben pedig balra.

Buti András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. Bár a feladat nem kérdezte, érdemes kiszámítani a tömegközéppont elmozdulását is. Kezdetben a tömegközéppont a bal oldali rúdvégtől

$$x_s = \frac{m_2(l_1+\frac{1}{2}l_2) + m_1\frac{1}{2}l_1}{m_1+m_2}$$

távol van, ennek a mennyiségnek a megváltozása a hőtágulás hatására:

$$\Delta x_s = \frac{m_2(\alpha_1l_1+\frac{1}{2}\alpha_2l_2) + m_1\frac{1}{2}\alpha_1l_1}{m_1+m_2}.$$

A tömegközéppont elmozdulása jobb felé:

$$\Delta x_s - \Delta x_1 = \frac{l_1l_2}{2(l_1+l_2)}\,(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T.$$

Látható, hogy a tömegközéppont mindig a kisebb hőtágulási együtthatójú fémrúd irányába tolódik el, ha viszont a két anyag hőtágulás szempontjából egyformán viselkedik, akkor s tömegközéppont – a méret- és tömegarányoktól függetlenül – az eredeti helyén marad.