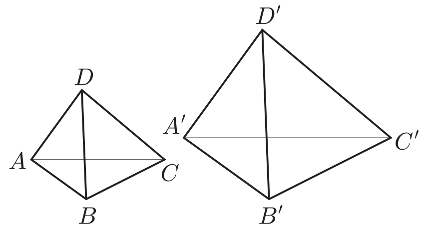
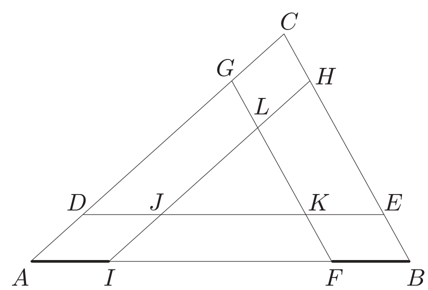
Megoldás. Ismert, hogy ha két tetraéder lapjai párhuzamosak, akkor a tetraéderek hasonlók egymáshoz (*1. ábra*). Hasonló tetraéderek térfogatának aránya pedig megegyezik megfelelő oldalaik arányának köbével.



1. ábra

Tekintsük az egységnyi térfogatú $\mathcal{T}$ tetraédernek azt a lapját, mellyel nem húztunk párhuzamos síkot. Ha ez a lap ABC, akkor a $\mathcal{T}$ térfogatát felező, annak lapjaival párhuzamos síkok ABC-t rendre a DE, FG, HI szakaszokban metszik. Ezek a szakaszok (a síkok párhuzamossága miatt) párhuzamosak az ABC háromszög megfelelő oldalaival, hosszukra pedig (a térfogat felezése miatt) teljesül, hogy

$$AB : DE = BC : FG = CA : HI = \sqrt[3]{2}.$$



2. ábra

Jelöljük a DE, FG, HI szakaszok metszéspontjai által meghatározott háromszög csúcsait a *2. ábrán* látható módon J, K, L-lel. A JKL háromszög a feladatban szereplő új tetraéder egyik lapja. Az $AFED$ és az $IBED$ négyszögek paralelogrammák, hiszen például $AF = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}AB = ED$. Így

$$AI = FB = AB - DE = AB\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Az $AIJD$ és az $FBEK$ négyszögek is paralelogrammák, azért

$$JK = DE - (DJ + KE) = DE - (AI + FB) =$$
$$= AB\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right) = \frac{3 - 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot AB.$$

Mivel az új tetraéder JK élének $\mathcal{T}$ AB éle felel meg, a két hasonló tetraéder térfogatának aránya

$$\left(\frac{3 - 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 : 1.$$

Tehát a feladatban szereplő új tetraéder térfogata

$$\left(\frac{3 - 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = \frac{11}{2} - 27\sqrt[3]{2} + 18\sqrt[3]{4} \approx 0{,}0554$$

térfogategység.

() *Mészáros Gábor* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.) dolgozatának felhasználásával