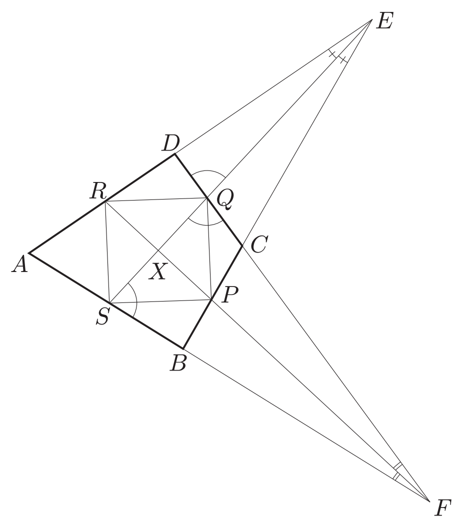
Megoldás. Jelöljük a négyszög csúcsait az *ábrán* látható módon A, B, C, D-vel. Feltehetjük, hogy az AB és DC félegyenesek F-ben, az AD és BC félegyenesek pedig E-ben metszik egymást. Az AFD szög szögfelezője messe a BC és AD oldalakat rendre a P, R pontokban, az AEB szög szögfelezője pedig messe a CD és AB oldalakat rendre a Q, S pontokban, az AFD szög szögfelezőjét pedig X-ben.



Először azt mutatjuk meg, hogy ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor az ES és FR egyenesek merőlegesek. A feltételből kapjuk, hogy $ABC\sphericalangle = EDF\sphericalangle$. Továbbá, mivel ES szögfelező, azért $DEQ\sphericalangle = QEC\sphericalangle$. Vagyis a DEQ és a BES háromszögekben két-két szögpár megegyezik, ezért a harmadik pár is egyenlő: $DQE\sphericalangle = BSE\sphericalangle$. Másrészt $DQE\sphericalangle = CQS\sphericalangle$, mert csúcsszögek, tehát $CQS\sphericalangle = BSE\sphericalangle$. Ez pedig azt jelenti, hogy a QSF háromszög egyenlő szárú, szárszögének felezője merőleges az alapjára, azaz a feladatban szereplő két szögfelező merőleges egymásra.

Megfordítva, ha a két szögfelező merőleges egymásra, akkor az XFS és XQF háromszögek egybevágóak, mert közös az XF oldaluk és megegyeznek az azon lévő szögeik, hiszen X-nél derékszög van, XF pedig felezi a QFS szöget. Ebből következően $BSE\sphericalangle = CQS\sphericalangle = DQE\sphericalangle$. Ekkor a DQE és az ESB háromszögekben két-két szögpár megegyezik, ezért a harmadik pár is egyenlő: $EDQ\sphericalangle = SBE\sphericalangle$, ami azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög húrnégyszög.

A szögfelezők merőlegességéből nemcsak az következik, hogy a QSF háromszög egyenlő szárú, ugyanúgy belátható, hogy az RPE háromszög is egyenlő szárú. Ezekben a háromszögekben XF, illetve XE szimmetriatengelyek, ezért felezik az alapokat: $SX = XQ$ és $RX = XP$. Mivel RP merőleges SQ-ra, a $PQRS$ négyszög átlói merőlegesen felezik egymást, tehát a négyszög valóban rombusz.

() *Farkas Balázs* (Eger, Neumann J. Gimn. és Szki., 11. évf.)