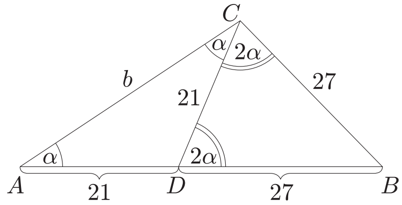
I. megoldás. Legyen az AB oldalon D az a pont, amelyre $ACD\sphericalangle = \alpha$. Ekkor $CDB\sphericalangle$ az ADC háromszögben külső szög, így $CDB\sphericalangle = 2\alpha$. Az ADC és a CDB háromszögek egyenlő szárúak, $CB = BD = 27$ és így $AD = AB - DB = 21 = DC$ (*1. ábra*).



1. ábra

A CDB háromszögben a koszinusztételt felírva $\cos 2\alpha$ kifejezhető:

$$\cos 2\alpha = \frac{DC^2 + DB^2 - CB^2}{2 \cdot DC \cdot DB} = \frac{21^2 + 27^2 - 27^2}{2 \cdot 21 \cdot 27} = \frac{7}{18}.$$

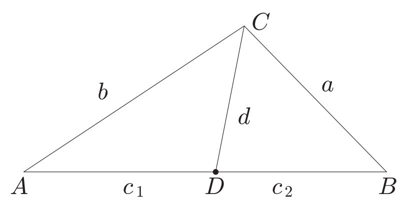
Írjuk fel a koszinusztételt az ADC háromszögben és használjuk fel, hogy $\cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$:

$$\begin{aligned} b^2 = AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = \\ &= 2 \cdot 21^2 + 2 \cdot 21 \cdot 21 \cdot \cos 2\alpha = 2 \cdot 21^2 \left(1 + \frac{7}{18}\right) = \frac{2 \cdot 21^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 9} = 7^2 \cdot 5^2, \end{aligned}$$

ahonnan a b oldal hossza 35 egység.

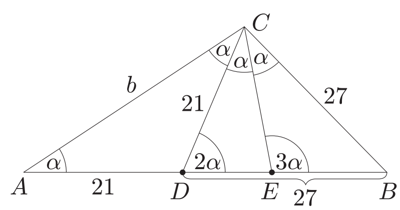
Megjegyzés. Az *1. ábra* alakzatához hasonló esetben létrejövő szakaszok között a Stewart-tétel néven ismert összefüggés áll fenn. Ha D az AB oldal tetszőleges pontja, akkor a *2. ábra* betűzésével

$$c \cdot (d^2 + c_1 \cdot c_2) = a^2 \cdot c_1 + b^2 \cdot c_2.$$



2. ábra

II. megoldás. Rajzoljuk meg a C csúcsnál lévő 3α nagyságú szög szögharmadoló egyeneseit, messék ezek az AB oldalt a D, illetve E pontokban. Az előző megoldás szerint $AD = 21$, $DB = 27$, és $CEB\sphericalangle = 3\alpha$ (*3. ábra*).



3. ábra

Az ábrán két pár hasonló háromszög található:

(1) $ABC \sim CBE$, hiszen mindkettejükben van egy α és egy 3α nagyságú szög, továbbá

(2) $AEC \sim CED$, hiszen mindkettejüknek van egy α és egy 2α nagyságú szöge.

Az első hasonlóságból $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{BC}{BE}$, ahonnan $AC = \dfrac{CE \cdot BC}{BE} = \dfrac{27 \cdot CE}{BE}$. A másodikból $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{DE}{CE}$, ahonnan $CE^2 = AE \cdot DE$.

Felhasználva, hogy $AE = 21 + DE$ és $BE = 27 - DE$, azt kapjuk, hogy

(1)
$$AC = \frac{27 \cdot \sqrt{(21 + DE) \cdot DE}}{27 - DE}.$$

A DE szakasz hosszát a BCD háromszögből kaphatjuk meg a szögfelező tétel felhasználásával:

$$\frac{DE}{EB} = \frac{DE}{27 - DE} = \frac{DC}{CB} = \frac{21}{27}, \quad \text{ahonnan} \quad DE = \frac{189}{16},$$

(1)-be behelyettesítve $AC = 35$.

III. megoldás. Az a, c oldalakra írjuk fel a szinusztételt: $\frac{48}{27} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$. Az addíciós tétel felhasználásával:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha =$$
$$= 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha.$$
$$\frac{3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{48}{27} = \frac{16}{9}.$$

Egyszerűsíthetünk $\sin \alpha \neq 0$-val, így a négyzetes összefüggés felhasználásával a következő másodfokú egyenlethez jutunk: $36 \cos^2 \alpha = 25$, innen $\cos \alpha = \pm \frac{5}{6}$. A $\gamma = 3\alpha$ feltétel miatt $\cos \alpha$ nem lehet negatív.

Ezután írjuk fel az a oldalra a koszinusztételt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Behelyettesítve az ismert értékeket:

$$27^2 = b^2 + 48^2 - 2b \cdot 48 \cdot \frac{5}{6}.$$

Elvégezve a műveleteket a $b^2 - 80b + 1575 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Innen $b = 35$, illetve $b = 45$. Könnyű igazolni, hogy $b = 45$ nem megoldása a feladatnak. Mivel α az a és b közül a kisebbikkel szemben fekvő szög, a szerkesztés során két háromszöget is kapunk, a $b = 45$ esetén azonban nem teljesül a $\gamma = 3\alpha$ kikötés.

Megjegyzés. Az utóbbi megoldás végén felmerült diszkussziós probléma elkerülhető, ha $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ meghatározását követően a

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

és a

$$\sin \beta = \sin(180° - 4\alpha) = \sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

egyenletekre ismét a szinusztételt alkalmazzuk:

$$\frac{b}{27} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 4 \cdot \cos \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{14}{36},$$

ahonnan

$$b = 27 \cdot 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{14}{36} = 35.$$