I. megoldás. Írjuk fel a sorozat első öt elemének szorzatát, felhasználva az elemek közt fennálló összefüggést:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} = a_2 \cdot a_4 = 2,$$

az $a_4 = \dfrac{a_3}{a_2}$-t beírva, kapjuk, hogy $a_2 \dfrac{a_3}{a_2} = a_3 = 2$.

A következő 5 elem szorzatából hasonlóképpen kapjuk, hogy $a_8 = 2$.

Ezután az első tíz elem szorzatát írjuk fel a következő alakban:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_7}{a_6} \cdot \frac{a_8}{a_7} \cdot \frac{a_9}{a_8} = 4.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket, felhasználva a feltételt, és beírva az a_3 és a_8 előbb kapott értékét:

$$a_2 \cdot a_9 = a_3 \cdot a_1 \cdot a_8 \cdot a_{10} = 4 \cdot a_1 \cdot a_{10} = 4.$$

Innen $a_1 = \dfrac{1}{a_{10}}$, $a_2 = a_1 \cdot a_3 = \dfrac{1}{a_{10}} \cdot 2 = \dfrac{2}{a_{10}}$, $a_4 = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{2}{\frac{2}{a_{10}}} = a_{10}$, $a_5 = \dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{a_{10}}{2}$, $a_6 = \dfrac{a_5}{a_4} = \dfrac{a_{10}}{2a_{10}} = \dfrac{1}{2}$, $a_7 = a_6 \cdot a_8 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $a_9 = 2$, $a_{10} = 1$, és végül $a_5 = \dfrac{1}{2}$, $a_4 = 1$, $a_2 = 2$ és $a_1 = 1$.

A sorozat tagjai sorrendben: 1, 2, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 2, 1. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kapott számsorozat eleget tesz a feltételnek.

() *Szeberényi Ágnes* (Budapest, Árpád Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Számaink pozitívak, így tekintsük a kettes alapú logaritmusukat, legyen $b_i = \log_2 a_i$. A feltétel rájuk nézve azt jelenti, hogy

$$b_i = b_{i-1} + b_{i+1} \qquad i = 2, 3, \dots, 9, \tag{1}$$

illetve $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} = 1$. Adjuk össze (1)-et i-re és $(i+1)$-re:

$$b_i + b_{i+1} = b_{i-1} + b_{i+1} + b_i + b_{i+2}, \quad \text{ahonnan} \quad 0 = b_{i-1} + b_{i+2},$$

a b_i sorozat „harmadszomszédos” elemei tehát egymás ellentettjei. Ha $b_1 = x$, $b_2 = y$ és $b_3 = z$, akkor a sorozat elemei rendre

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
x	y	z	$-x$	$-y$	$-z$	x	y	z	$-x$

Így $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = z = 1$ és $b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} = y = 1$, tehát $y = z = 1$. Mivel pedig (1) szerint $y = x + z$, innen $x = 0$. A b_i sorozat tehát 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, az a_i sorozat ennek megfelelően $a_i = 2^{b_i}$ alapján 1, 2, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 2, 1.

Az eddigiekből annyi következik, hogy ha van a feladatnak megoldása, akkor az csak a talált sorozat lehet. Ha viszont az $(x; y; z)$ számhármasra teljesül a feltétel, azaz $x - y + z = 0$, akkor ezt a számhármast a b_i sorozatban „eggyel eltolva” az $(y; z; -x)$ számhármast kapjuk. Erre kiszámolva az $y - z + (-x)$ összeget, kapjuk, hogy az $y - z - x = -(x - y + z) = 0$ ugyancsak.

Ha tehát a második elem az első és a harmadik összege, akkor a kapott b_i sorozat képzési szabálya szerint minden elem az őt közrefogó kettő összege, sorozatunk tehát a feladat – egyetlen – megoldása.

Megjegyzés. Ez a gondolatmenet a szorzatok és hányadosok nyelvén lényegesen áttekinthetetlenebb volna, de a logaritmusokra való áttérés nem csak tipográfiailag egyszerűsíti a megoldást. A feltételt az (1) alakba írva és átrendezve a $b_{i+1} = b_i - b_{i-1}$ úgynevezett lineáris rekurziót kapjuk és ilyen tulajdonságú sorozatokra jólismert eredmények vannak.