Megoldás. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $\alpha=\beta$ és $\gamma=180^\circ-2\alpha$. Ekkor az egyenlet:

$$2\sin^2\alpha=\sin\gamma=\sin(180^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha,\quad \text{azaz}$$
$$2\sin^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Egyszerűsítve az egyenletet $2\sin\alpha\neq 0$-val kapjuk, hogy $\sin\alpha=\cos\alpha$. Mivel $0<\alpha<180^\circ$, ez csak akkor áll fenn, ha $\alpha=\beta=45^\circ$ és $\gamma=90^\circ$. Ekkor a háromszög derékszögű és egyenlő szárú.

2. eset: $\alpha=\gamma$ és $\beta=180^\circ-2\alpha$. Ekkor az egyenlet:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\alpha.$$

A β értéket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sin^2\alpha+(\sin 2\alpha)^2=\sin\alpha,$$
$$\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin\alpha.$$

Egyszerűsítve $\sin\alpha\neq 0$-val, a $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ helyettesítés után:

$$4\sin^3\alpha-4\sin\alpha-\sin\alpha+1=0.$$

Innen $4\sin\alpha\cdot(\sin^2\alpha-1)-(\sin\alpha-1)=0$. Alakítsunk szorzattá:

$$(\sin\alpha-1)\cdot\left[4\sin\alpha\cdot(\sin\alpha+1)-1\right]=0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ha $\sin\alpha-1=0$, akkor $\sin\alpha=1$, $\alpha=90^\circ$. Mivel $\alpha=\gamma$, ez nem lehetséges. Ha $4\sin\alpha\cdot(\sin\alpha+1)-1=0$, akkor a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$4\sin^2\alpha+4\sin\alpha-1=0.$$

Innen $\sin\alpha_1=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}<-1$, nem lehet megoldás; $\sin\alpha_2=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}2071$, $\alpha_2\approx 11{,}95^\circ$. A háromszög szögei a második esetben $\alpha=\gamma\approx 11{,}95^\circ$, $\beta\approx 156{,}1^\circ$.

() *Antal László* (Eger, Szilágy E. Gimn. és Koll., 11. évf.)