I. megoldás. A feladatban adott szögfüggvényeket a $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ azonosság segítségével átírjuk úgy, hogy szinusz helyett koszinusz szerepeljen bennük. Eszerint a $\cos 65^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 5^\circ = \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 10^\circ$ egyenlőséget kell bizonyítanunk. A megoldás során felhasználunk egy, a függvénytáblázatban is megtalálható összefüggést:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big).$$

Ezt a $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$ kifejezésre felírva egy 8-tagú összeget kapunk:

$$\begin{aligned}
&8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta = 2\big[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big]\big[\cos(\gamma+\delta)+\cos(\gamma-\delta)\big] =\\
&= 2\big[\cos(\alpha+\beta)\cos(\gamma+\delta) + \cos(\alpha+\beta)\cos(\gamma-\delta) +\\
&+ \cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma+\delta) + \cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)\big] =\\
&= \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta) + \cos(\alpha+\beta+\gamma-\delta) +\\
&+ \cos(\alpha+\beta-\gamma+\delta) + \cos(\alpha-\beta+\gamma+\delta) + \cos(\alpha-\beta-\gamma-\delta) +\\
&+ \cos(\alpha-\beta+\gamma-\delta) + \cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta).
\end{aligned}$$

Írjuk át a bal oldal 8-szorosát ennek megfelelően:

$$\begin{aligned}
&8\cos 65^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 5^\circ = \cos 155^\circ + \cos 85^\circ +\\
&+ \cos 145^\circ + \cos 95^\circ + \cos 45^\circ + \cos(-25^\circ) + \cos 35^\circ + \cos(-15^\circ).
\end{aligned}$$

Írjuk most át a jobb oldal 8-szorosát:

$$\begin{aligned}
&8\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 145^\circ + \cos 95^\circ +\\
&+ \cos 125^\circ + \cos 115^\circ + \cos 45^\circ + \cos(-5^\circ) + \cos 25^\circ + \cos 15^\circ.
\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy $\cos\xi = \cos(-\xi)$. Innen

$$\begin{aligned}
&\cos 145^\circ + \cos 95^\circ + \cos 45^\circ + \cos(-25^\circ) + \cos(-15^\circ) =\\
&= \cos 145^\circ + \cos 95^\circ + \cos 45^\circ + \cos 25^\circ + \cos 15^\circ.
\end{aligned}$$

Ezután a megmaradó $\cos 155^\circ + \cos 85^\circ + \cos 35^\circ = \cos 125^\circ + \cos 115^\circ + \cos(-5^\circ)$ egyenlőséget kell bizonyítanunk. A $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ összefüggést a bal oldalon 85°-ra és 35°-ra, míg a jobb oldalon 125°-ra és -5°-ra alkalmazva

$$\cos 85^\circ + \cos 35^\circ = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 25^\circ = \cos 25^\circ$$

és

$$\cos 125^\circ + \cos(-5^\circ) = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 65^\circ = \cos 65^\circ.$$

Így a bizonyítandó állítás a $\cos 155^\circ + \cos 25^\circ = \cos 115^\circ + \cos 65^\circ$, ami az előzőekhez hasonlóan $2\cos 90^\circ \cdot \cos 65^\circ$ és $2\cos 90^\circ \cdot \cos 25^\circ$ egyenlőségét jelenti. $\cos 90^\circ = 0$, így az egyenlőség teljesül.

() *Hubai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozatának ötletéből

II. megoldás. A bizonyítandó állítás egy azonosságból következik:

$$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha).$$

A jobb oldalon $\sin(60^\circ+\alpha) \cdot \sin(60^\circ-\alpha) = \sin^2 60^\circ \cdot \cos^2\alpha - \cos^2 60^\circ \cdot \sin^2\alpha = \frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha$. Maga a jobb oldal így $3\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha$, ami valóban $\sin 3\alpha$. Ez azt jelenti, hogy ha $\sin 3\alpha \neq 0$, akkor

$$\frac{\sin\alpha \cdot \sin(60^\circ+\alpha) \cdot \sin(60^\circ-\alpha)}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

A bizonyítandó egyenlőséget átrendezve

$$\frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 85^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}. \tag{2}$$

Mindkét oldalon az (1) azonosság bal oldala áll, a bal oldalon $\alpha = 25^\circ$, a jobb oldalon pedig $\alpha = 20^\circ$ helyettesítése után. A (2) egyenlőség tehát valóban teljesül, mindkét tört értéke $\frac{1}{4}$.