Megoldás. Bármi is egy adott pillanatban az addig dobott számok összege – hacsak nem 4-gyel osztható, hiszen akkor a játék befejeződik –, a következő játékos tud olyan számot dobni, amellyel nyer: ha az összeg $4k+1$ alakú, akkor 3-at, ha $4k+2$ alakú, akkor 2-t vagy 6-ot, ha pedig $4k+3$ alakú, akkor 1-et vagy 5-öt dobva győz.

Így minden dobáskor legalább $\frac{1}{6}$ az esélye annak, hogy a következő dobással a játék véget ér. Legfeljebb $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ tehát annak a valószínűsége, hogy a játék n dobás után még nem ér véget, ez az érték pedig tart a nullához. A játék tehát 1 valószínűséggel véget ér.

Tegyük fel, hogy a játék egy adott állásában a dobott számok összege $4k+r$ alakú ($0 \le r \le 3$). Ha P_r jelöli annak a valószínűségét, hogy a soronkövetkező játékos – aki éppúgy lehet Anna, mint Zsófi, hívjuk őt X-nek – ezután valamikor győz, akkor ez a valószínűség nyilván csak az r maradéktól függ. Másfelől láttuk, hogy a játék véget ér, éppen ezért ebből a helyzetből a másik játékos, aki X után jön, $1-P_r$ valószínűséggel nyer. Itt értelemszerűen $P_0=0$, hiszen X már veszített. Ha pedig X dobása nyomán $4k+r'$ lett a dobott számok összege, akkor most nem X következik, így a fentiek szerint $1-P_{r'}$ annak a valószínűsége, hogy ő nyer. A továbbiakban ezt az egyszerű észrevételt alkalmazzuk a P_r valószínűségek felírásakor.

Vizsgáljuk meg a nemnulla maradékokat; legyen először $r=1$, és nézzük meg, hogy a lehetséges dobásai nyomán kialakult helyzetben X milyen valószínűséggel nyeri meg a játékot. Ha 3-at dob – ennek a valószínűsége $\frac{1}{6}$ – akkor $(1-P_0)=1$ valószínűséggel nyer. Ha 1-et vagy 5-öt – ennek az esélye $\frac{1}{3}$ – akkor $4k+2$ alakú számra jutva a fentiek szerint $(1-P_2)$ valószínűséggel nyer. Hasonlóan kapjuk, hogy ha 2-t vagy 6-ot dob – ennek az esélye is $\frac{1}{3}$ – akkor $(1-P_3)$, ha pedig 4-et dob, akkor $(1-P_1)$ valószínűséggel nyer. Eszerint:

$$P_1=\frac{1}{6}(1-P_0)+\frac{1}{3}(1-P_2)+\frac{1}{3}(1-P_3)+\frac{1}{6}(1-P_1) \tag{1}$$

Hasonlóan írhatók föl a P_2 és a P_3 valószínűségek:

$$P_2=\frac{1}{3}(1-P_0)+\frac{1}{3}(1-P_3)+\frac{1}{6}(1-P_1)+\frac{1}{6}(1-P_2), \quad \text{illetve} \tag{2}$$

$$P_3=\frac{1}{3}(1-P_0)+\frac{1}{3}(1-P_1)+\frac{1}{6}(1-P_2)+\frac{1}{6}(1-P_3). \tag{3}$$

A három egyenletet rendezve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

(1)-ből: $$7P_1+2P_2+2P_3=6.$$

(2)-ből: $$P_1+7P_2+2P_3=6.$$

(3)-ból: $$2P_1+P_2+7P_3=6.$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $P_1=\frac{50}{99}$, $P_2=\frac{60}{99}$, $P_3=\frac{62}{99}$.

Térjünk rá ezután a két szereplő, Anna és Zsófi játékára. Ha elsőre Anna $4k+r$ alakú számot dob, akkor a fentiek szerint $1-P_0=1$ valószínűséggel győz, ha $r=0$; és $1-P_r$ valószínűséggel, ha $r=1,2,3$. Mivel pedig $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dob 0 vagy 3 maradékot és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 1-et (1 és 5), illetve 2-t (2 és 6), azért annak a valószínűsége, hogy kezdő játékosként Anna győz:

$$\frac{1}{6}(1-P_0)+\frac{1}{3}(1-P_1)+\frac{1}{3}(1-P_2)+\frac{1}{6}(1-P_3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{49}{99}+\frac{1}{3}\cdot\frac{39}{99}+\frac{1}{6}\cdot\frac{37}{99}=\frac{52}{99},$$

valamivel nagyobb, mint $\frac{1}{2}$.

Megjegyzés. Sokan elmulasztották annak igazolását, hogy a játék 1 valószínűséggel véget ér, így pedig a fenti okoskodás hiányos.