Megoldás. A háromszögben szokásos jelölés szerint írjuk fel az a oldalra a koszinusztételt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha. \tag{1}$$

A koszinusztétel ismételt alkalmazásával felírhatjuk, hogy

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Innen

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \tag{2}$$

Helyettesítsük (2)-be az (1)-ből a^2-re kapott összefüggést:

$$\cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha - c^2}{2b\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}}.$$

Vonjunk össze és egyszerűsítsük a törtet $2b \neq 0$-val. Kapjuk, hogy

$$\cos\gamma = \frac{b - c \cdot \cos\alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}}.$$

Ezután helyettesítsük be az adott értékeket és végezzük el a kijelölt műveleteket: $\cos\gamma \approx -0{,}02346$. A koszinusz értéke negatív, vagyis a keresett szög nagyobb 90°-nál. γ visszakeresett értéke $180^\circ - 88{,}6557^\circ \approx 91{,}35^\circ$.

() *Juhász Anikó* (Eger, Gárdonyi G. Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A feladatra sok hibás és hiányos dolgozat érkezett. Ha a kézenfekvőbb módon először az a oldal hosszát számoljuk ki a koszinusztétellel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha = 5{,}1^2 + 10^2 - 2 \cdot 5{,}1 \cdot 10 \cdot \cos 58^\circ,$$

akkor $a^2 \approx 71{,}958$ és innen $a \approx 8{,}48$ cm. Ha ezután felírjuk a szinusztételt, akkor

$$\sin\gamma = \frac{\sin 58^\circ}{a} \cdot c.$$

Az első meglepetés a behelyettesítés után következik: ha az a-ra kapott közelítőértéket behelyettesítjük, akkor $\sin\gamma \approx 1{,}000056$ adódik, ez az érték nem lehetséges. Még mielőtt arra gondolnánk, hogy a háromszög nem létezik, gondoljuk meg, hogy az minden további nélkül megszerkeszthető. Máshol van a baj.

Amikor két tizedesre kerekítettük az a-t, akkor 8,48 kisebb a tényleges értéknél, így a szinusztétel nevezőjét csökkentve a tört és így $\sin\gamma$ értéke nőtt. A kerekítés következménye általában a végeredmény pontatlansága, de most γ kritikus tartományban van: megközelítőleg 90°, a szinusza majdnem 1, a kerekítés tehát most nem az eredmény értékét, hanem annak jellegét változtatja meg. Onnan is kiderül, hogy $\sin\gamma$ közelítőleg 1, hogy maga a háromszög közelítőleg egy félbevágott szabályos háromszög, a C csúcsnál körülbelül derékszög van.

Számoljunk tehát pontosabban. Négy tizedes pontossággal $a \approx 8{,}4828$ és ekkor már $\sin\gamma \approx 0{,}9997$.

Ha valaki eljut idáig, akkor már „csak” azzal kell szembenéznie, hogy γ hegyesszög-e, vagy tompa. A γ a háromszög legnagyobb szöge, de ennél több az adatokból nem derül ki. Ennek tisztázása történhet a koszinusztétellel.