I. megoldás. Legyen a gömb sugara r, a C csonkakúp alapköreinek sugara R_1 és R_2, alkotóinak hossza pedig a. A csonkakúp magassága megegyezik a gömb sugarának kétszeresével, ezért térfogata

$$V = (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) \cdot (2r) \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Tekintsük a testeknek a csonkakúp tengelyére illeszkedő tetszőleges S síkkal való metszetét. A gömb és S metszete egy r sugarú kör, a csonkakúp és S metszete pedig egy, a kört érintő szimmetrikus trapéz (lásd az *ábrát*). Mivel a trapéz érintőnégyszög, azért szemközti oldalainak összhossza megegyezik, azaz $a+a=2R_1+2R_2$, tehát $a=R_1+R_2$. Ezt felhasználva a csonkakúp felszíne

$$A=R_1^2\cdot\pi+R_2^2\cdot\pi+a\cdot(R_1+R_2)\cdot\pi=2(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)\cdot\pi.$$

Tehát a csonkakúp térfogatának és felszínének aránya

$$\frac{A}{V}=\frac{(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)\cdot(2r)\cdot\frac{\pi}{3}}{2(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)\cdot\pi}=\frac{r}{3},$$

ahol r a beírható gömb sugara.

Megjegyzés. Feladatunk eredménye következik az általánosított **B. 3587.** feladat eredményéből, azaz a csonkakúpra vonatkozó állítás abból, hogy miden síklapokkal határolt testre ugyanaz a keresett arány. Az állítás ilyen módon történő bizonyítása lapunk internetes oldalán olvasható.

II. megoldás. Az adott r sugarú gömböt a C csonkakúp egy O középpontú, R sugarú K körvonal mentén érinti, ahol $r > R$. Ennek a körvonalnak a síkja párhuzamos a C alapköreit tartalmazó S_1 és S_2 síkokkal. Válasszunk tetszőlegesen nagy n természetes számot, és rajzoljunk a K kör köré egy n oldalú szabályos sokszöget, amit K'-vel jelölünk. Legyen K'' az a K-ba írt szabályos n-szög, amelyet K-ból O középpontú $\lambda = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ arányú kicsinyítéssel kapunk. Húzzuk meg ezután C azon alkotóit, melyek tartalmazzák a K' sokszög csúcsait, és tekintsük azokat a síkokat, amelyek a csonkakúpot ezen alkotók mentén érintik. Ezek a síkok valamint az S_1 és S_2 síkok egy, az r sugarú gömb köré írt C' csonkagúlát zárnak közre. Ennek V' térfogata és A' felszíne között a **B. 3587.** feladat megoldása alapján fennáll a $\frac{V'}{A'}=\frac{r}{3}$ összefüggés.

Legyen most C'' az a csonkagúla, melyet C'-ből O középpontú λ arányú kicsinyítéssel nyerünk, ennek felülete tartalmazza a K'' sokszöget. Nyilvánvaló tehát, hogy C'' része egy, a C csonkakúpba írt csonkagúlának, C' pedig egy, a C köré írt csonkagúla. Ezért $V''<V<V'$ és $A''<A<A'$, ahol V'' és A'' a C'' csonkagúla térfogatát, illetve felszínét jelöli. Mivel $A''=\lambda^2 A'$ és $V''=\lambda^3 V'$, kapjuk, hogy

$$\lambda^3\frac{r}{3}=\frac{V''}{V'}\cdot\frac{V'}{A'}=\frac{V''}{A'}<\frac{V}{A}<\frac{V'}{A''}=\frac{A'}{A''}\cdot\frac{V'}{A'}=\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{r}{3}.$$

Minthogy elegendően nagy n esetén λ tetszőlegesen közel eshet az 1-hez, $\frac{V}{A}$ értéke csakis $\frac{r}{3}$ lehet.