I. megoldás. A k_i kör középpontját O_i-vel jelölve az $O_1O_2O_3$ háromszög oldalaira $O_1O_2 = 3R$, $O_1O_3 = 4R$, $O_2O_3 = 5R$ adódik, mert érintkező körök esetén az érintési pont és a körök középpontjai egy egyenesre illeszkednek. A háromszög O_1-nél lévő szöge tehát Pitagorasz tételének megfordításából következően derékszög. Ezért a háromszög területe

$$T = \frac{O_1O_2 \cdot O_1O_3}{2} = 6R^2.$$

Mivel a háromszög kerülete

$$2s = O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_1 = 12R,$$

a háromszögbe írható kör sugara $r = \dfrac{T}{s} = R$.

2. ábra

2. ábra

Jelölje az $O_1O_2O_3$ háromszög beírt körének az oldalakon lévő érintési pontjait a *2. ábrán* látható módon F_1, F_2 és

F_3. Ismert (lásd pl. Kiss Gy.: *Amit jó tudni a háromszögekről,* KöMaL 2002/3, 130–139. old), hogy ekkor

$$O_1F_2 = O_1F_3 = s - O_2O_3 = 6R - 5R = R,$$

$$O_2F_1 = O_2F_3 = s - O_1O_3 = 6R - 4R = 2R,$$

$$O_3F_2 = O_3F_1 = s - O_1O_2 = 6R - 3R = 3R.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az F_i $(i = 1, 2, 3)$ pontok egybeesnek az E_i pontokkal. Vagyis az $O_1O_2O_3$ háromszög beírt köre átmegy az E_i pontokon, azaz megegyezik az $E_1E_2E_3$ háromszög köré írt körrel.

Ezért az $E_1E_2E_3$ háromszög köré írt körének sugara R, tehát ez a kör egybevágó k_1-gyel.

() *Koltai Péter* (Révkomárom, Selye J. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Miután beláttuk, hogy az $O_2O_1O_3$ szög derékszög, a következő úton is befejezhetjük a bizonyítást:

Mivel $O_1E_3 = O_1E_2 = R$, azért az $O_1E_2E_3$ derékszögű háromszögben $E_2E_3 = \sqrt{2}R$. Az $E_2O_3E_1$ és $E_3O_2E_1$ egyenlő szárú háromszögek szárszögeinek összege $90°$, tehát az alapon fekvő szögeik összege – az *1. ábra* jelöléseit használva – $2\alpha + 2\beta = 270°$ és így

$$E_3E_1E_2\sphericalangle = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - \frac{270°}{2} = 45°.$$

Az $E_1E_2E_3$ háromszög köré írt kör sugarát R_E-vel jelölve az ismert képlet alapján kapjuk, hogy $\sqrt{2}R = E_2E_3 = 2R_E \sin 45°$, ahonnan $R_E = R$ adódik, ami éppen a bizonyítandó állítás.