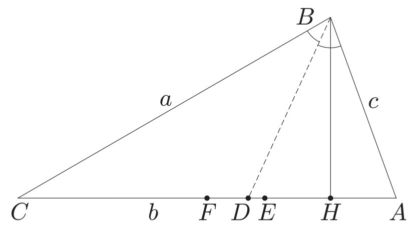
Megoldás. Számítsuk ki a szakaszok hosszát a háromszög oldalainak a segítségével.



Jelölje a háromszög oldalait a szokásos módon a, b és c. Ha $a=c$, akkor a D, E, F és H pontok egybeesnek, ebben az esetben az állítás nyilván igaz. Egyébként pedig az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a>c$; ekkor a C, F, D, E, H pontok ebben a sorrendben követik egymást a CA félegyenesen. A szögfelező-tétel szerint $CD=\dfrac{a}{a+c}\,b$. Így

$$FD=CD-CF=\frac{a}{a+c}\,b-\frac{b}{2}=\frac{a-c}{2(a+c)}\,b.$$

Mivel a beírt kör az E pontban érinti a b oldalt,

$$EF=CE-CF=(s-c)-\frac{b}{2}=\frac{a+b-c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-c}{2}.$$

Végül írjuk fel a Pitagorasz-tételt a CHB és a BHA derékszögű háromszögekben; ebből $a^2-CH^2=c^2-(b-CH)^2$. (Ha az A-nál tompaszög van, akkor $b-CH$ negatív, de az egyenlőség akkor is fennáll.) Négyzetre emelve és rendezve a következőt kapjuk:

$$CH=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b},\quad \text{ezért}\quad FH=CH-CF=\frac{a^2-c^2}{2b}.$$

Ezután már könnyen ellenőrizhetjük, hogy az EF szakasz valóban az FD és FH szakaszok mértani közepe:

$$FD\cdot FH=\frac{a-c}{2(a+c)}\,b\,\frac{a^2-c^2}{2b}=\frac{a-c}{2(a+c)}\,b\,\frac{(a-c)(a+c)}{2b}=\left(\frac{a-c}{2}\right)^2=EF^2.$$

() *Hegyi Gábor* (Budapest, Szt. István Gimn., 10. oszt.)